# Unicidad de la forma canónica de Jordan

**Objetivos.** Demostrar que la forma canónica de Jordan de un operador lineal es única salvo el orden de los bloques de Jordan. Deducir las fórmulas para calcular la forma canónica de Jordan a través de los rangos de $(T - \lambda I)^k$.

**Requisitos.** Bloque de Jordan, potencias de un bloque de Jordan, matrices diagonales por bloques.

**1. Potencias de un bloque de Jordan (repaso).** Recordamos que

$$\mathrm{r}(J_m(0)^k) = \begin{cases} m - k, & 0 \le k \le m; \\ 0, & k \ge m. \end{cases}$$

Si $\lambda \ne 0$, entonces $\mathrm{r}(J_m(\lambda)^k) = m$ para todo $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

**2. Matrices diagonales por bloques (repaso).** Si $A = \operatorname{diag}(B_1, \ldots, B_p)$, entonces

$$A^k = \operatorname{diag}(B_1^k, \ldots, B_p^k), \qquad \mathrm{r}(A) = \sum_{j=1}^{p} \mathrm{r}(B_j),$$

**3. Ejemplo.** Sea $A$ una matriz de Jordan y sea $\lambda_0$ una de sus entradas diagonales. Supongamos que $A$ contiene $n_1$ bloques $J_1(\lambda_0)$, $n_2$ bloques $J_2(\lambda_0)$ y $n_3$ bloques $J_3(\lambda_0)$ y no tiene bloques $J_k(\lambda_0)$ con $k > 3$. Denotemos por $m$ al número de los renglones ocupados por bloques con otros elementos diagonales:

$$A = \operatorname{diag}\big(\underbrace{J_1(\lambda_0), \ldots, J_1(\lambda_0)}_{n_1 \text{ veces}}, \underbrace{J_2(\lambda_0), \ldots, J_2(\lambda_0)}_{n_2 \text{ veces}}, \underbrace{J_3(\lambda_0), \ldots, J_3(\lambda_0)}_{n_3 \text{ veces}}, \underbrace{\qquad \ldots \qquad}_{\substack{\text{bloques con otras} \\ \text{entradas diagonales} \\ \text{ocupan } m \text{ renglones}}}\big).$$

1. Expresar $r_k = \mathrm{r}((A - \lambda_0 I)^k)$, $k = 0, 1, 2, 3$, a través de $n_1, n_2, n_3, m$.
2. Las igualdades obtenidas en el inciso 1 se pueden tratar como un sistema de ecuaciones lineales con incógnitas $n_1, n_2, n_3$. Resolver este sistema, es decir, calcular $n_1, n_2, n_3$.

**4. Teorema (unicidad de la forma canónica de Jordan).** Sea $V$ un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y sea $\mathcal{U}$ una base del espacio $V$ tal que la matriz asociada $T_{\mathcal{U}}$ es una matriz de Jordan. Para cada $\lambda \in \operatorname{sp}(T)$ denotemos por $n_k(\lambda)$ al número de los bloques $J_k(\lambda)$ en la matriz $T_{\mathcal{U}}$. Entonces

$$n_k(\lambda) = \mathrm{r}\left((T - \lambda I)^{k-1}\right) - 2\,\mathrm{r}\left((T - \lambda I)^k\right) + \mathrm{r}\left((T - \lambda I)^{k+1}\right).$$

Por consecuencia, $n_k(\lambda)$ no depende de la base $\mathcal{U}$, así que la forma canónica de Jordan de un operador lineal se determina de manera única salvo el orden de bloques.

*Demostración.* Fijamos algún $\lambda_0 \in \operatorname{sp}(T)$ e introducimos notaciones más breves:

$$n_k := n_k(\lambda_0), r_k := \operatorname{r}\left((T - \lambda_0 I)^k\right).$$

Además denotemos por $m$ al número de los renglones en la matriz $T_{\mathcal{U}}$ ocupados por bloques con entradas diagonales distintas de $\lambda_0$. El rango $r_k$ del operador $(T - \lambda_0 I)^k$ es igual al rango de la matriz asociada $(T_{\mathcal{U}} - \lambda_0 I_n)^k$ y se puede calcular fácilmente como la suma de los rangos de los bloques correspondientes:

$$r_k = \sum_{j=k+1}^{p} (j-k)n_j + m. \tag{1}$$

En la igualdad (1) cambiamos $k$ por $k-1$ y separamos el primer sumando:

$$r_{k-1} = \sum_{j=k}^{p} (j-k+1)n_j + m = n_k + \sum_{j=k+1}^{p} (j-k+1)n_j + m. \tag{2}$$

Luego en (1) cambiamos $k$ por $k+1$ y agregamos el primer sumando cero:

$$r_{k+1} = \sum_{j=k+2}^{p} (j-k-1)n_j + m = \sum_{j=k+1}^{p} (j-k-1)n_j + m. \tag{3}$$

De (1), (2) y (3) sigue la fórmula

$$r_{k-1} - 2r_k + r_{k+1} = n_k. \qquad \square$$

**5. Observación.** De la demostración sigue que los rangos $r_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, forman una sucesión que decrece estrictamente hasta $r_p$, donde $p$ es el tamaño máximo de los bloques $J_k(\lambda_0)$, y luego es constante:

$$r_0 > r_1 > \ldots > r_p = r_{p+1} = r_{p+2} = \ldots$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} n_p &= r_{p-1} - r_p, \\ n_k &= 0 \quad \forall k > p. \end{aligned}$$

**6. Ejemplos.** Calcular la forma canónica de Jordan de las siguientes matrices. Para reducir los cálculos, está dado el polinomio característico.

i) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\qquad \chi_A(\lambda) = (\lambda - 3)^3$;

ii) $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 7 & -8 & 5 \end{bmatrix}$, $\qquad \chi_A(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 4)^2$;

iii) $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$, $\qquad \chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)^2$;

iv) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\qquad \chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^3(\lambda - 1)$.

**7. Ejemplos.** Calcule las fórmas canónicas de Jordan de las siguientes matrices nilpotentes:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$