Convergencia uniforme de funciones holomorfas sobre subconjuntos compactos del dominio

Objetivos. Estudiar las propiedades del límite de una sucesión de funciones holomorfas que converge de manera uniforme sobre cualquier subconjunto compacto.

Prerrequisitos. Convergencia uniforme, subconjuntos compactos del plano, teorema integral de Cauchy, teorema de Morera, estimación de Cauchy para los coeficientes de una serie convergente.

Definición 1. Dado un conjunto X, denotamos por $B(X)$ al conjunto de todas las funciones acotadas $X \to \mathbb{C}$, con la norma-supremo:

$$\|f\|_{B(X)} \coloneqq \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Se sabe que $B(X)$ es un espacio de Banach.

Observación 2. Sea X un espacio topológico compacto de Hausdorff. Se sabe que $C(X)$ es un subespacio cerrado de $B(X)$.

Teorema 3. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y sea $(f_j)_{j\in\mathbb{N}} \in H(\Omega)^{\mathbb{N}}$. Supongamos que $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ y la sucesión $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge a g de manera uniforme sobre cada subconjunto compacto de Ω. Entonces, $g \in H(\Omega)$. Más aún, $(f_j')_{j\in\mathbb{N}}$ converge de manera uniforme a g' en cada subconjunto compacto de Ω.*

Demostración. Como la convergencia es uniforme en cada subconjunto compacto de Ω y cada punto de Ω tiene una vecindad cuya cerradura es compacto, concluimos que la función límite g es continua en Ω.

Para cualesquiera a, b, c en Ω tales que $\operatorname{conv}\{a, b, c\} \subseteq \Omega$, aplicamos a f_j el teorema de Cauchy para los triángulos:

$$\int\limits_{\Delta(a,b,c)} f_j(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Como $\operatorname{conv}\{a, b, c\}$ es un compacto en Ω, f_j converge a g de manera uniforme en este triángulo, y

$$\int\limits_{\Delta(a,b,c)} g(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{j\to\infty} \int\limits_{\Delta(a,b,c)} f_j(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Por el teorema de Morera, concluimos que $g \in H(\Omega)$.

Sea K un subconjunto compacto de Ω. Pongamos

$$r \coloneqq \frac{1}{d}(K, \mathbb{C} \setminus \Omega).$$

Como K es compacto, $\mathbb{C} \setminus \Omega$ es cerrado y estos dos conjuntos son disjuntos, concluimos que $r > 0$. Para cada z en K,

$$z + r\,\mathrm{cl}(\mathbb{D}) \subseteq \Omega.$$

Pongamos

$$E \coloneqq \bigcup_{z\in K} (z + r\,\mathrm{cl}(\mathbb{D})).$$

Es fácil ver que

$$E = \{w \in \mathbb{C}\colon\ d(w, K) \le r\}.$$

Por lo tanto, E es cerrado y acotado. Concluimos que E es compacto. Para cada z en K y cada j en $\mathbb{N}$, aplicamos la estimación de Cauchy a la función holomorfa $f_j - g$:

$$|f_j'(z) - g'(z)| \le \frac{1}{r} \max_{w\in z+r\mathbb{T}} |f_j(w) - g(w)| \le \frac{1}{r} \max_{w\in E} |f_j(w) - g(w)|.$$

Esta desigualdad se cumple para cada z en K. Por lo tanto,

$$\|f_j' - g'\|_{C(K)} \le \frac{1}{r} \|f_j - g\|_{C(E)}.$$

Como E es un compacto, la última expresión tiende a cero cuando j tiende a infinito. Concluimos que la sucesión $(f_j')_{j\in\mathbb{N}}$ tiende a g uniformemente sobre compactos. $\square$