Caminos homotópicos

Objetivos. Estudiar el concepto de caminos homotópicos.

Prerrequisitos. El teorema global de Cauchy.

Definición 1 (homotopía entre dos caminos cerrados)**.** Sea X un espacio topológico y sean $\gamma_0, \gamma_1 \in C([0,1], X)$ tales que $\gamma_0(0) = \gamma_0(1)$ y $\gamma_1(0) = \gamma_1(1)$. Una función H se llama *homotopía* entre γ_0 y γ_1 en X, si $H \in C([0,1]^2, X)$ y

$$H(s,0) = \gamma_0(s), \qquad H(s,1) = \gamma_1(s), \qquad H(0,t) = H(1,t) \qquad (s,t \in [0,1]).$$

Definición 2 (caminos cerrados homotópicos en un espacio topológico)**.** Sea X un espacio topológico y sean $\gamma_0, \gamma_1 \in C([0,1], X)$ tales que $\gamma_0(0) = \gamma_0(1)$ y $\gamma_1(0) = \gamma_1(1)$. Se dice que γ_0 y γ_1 son X-homotópicos si existe una homotopía entre γ_0 y γ_1 en X.

En vez de pensar en una función de dos argumentos, se puede pensar en una familia de funciones $(\gamma_t)_{t\in[0,1]}$, donde $\gamma_t(s) \coloneqq H(s,t)$. Sin embargo, para definir bien la continuidad, es cómodo pensar en una función de dos argumentos.

De manera intuitiva, esto significa que γ_0 se puede deformar de manera continua en γ_1, de tal manera que para cada t en $[0,1]$ el camino γ_t es cerrado y sus valores pertenecen a X.

Definición 3 (camino cerrado cero-homotópico en un espacio topológico)**.** Si γ_0 es X-homotópico a γ_1 y γ_1^* es un conjunto unipuntual, entonces se dice que γ_0 es cero-homotópico en X.

Definición 4 (espacios topológicos simplemente conexos)**.** Un espacio topológico X se llama *simplemente conexo* si X es conexo y cada camino cerrado en X es cero-homotópico.

Proposición 5. *Sea Ω un subconjunto de $\mathbb{C}$, abierto y convexo. Entonces, Ω es simplemente conexo.*

Demostración. Sea $\gamma_0 \colon [\alpha, \beta]$ un camino cerrado en Ω. Notamos que $\Omega \neq \emptyset$ porque $\gamma_0(0) \in \Omega$. Sea $z_1 \in \Omega$. Definimos $\gamma_1 \colon [0,1] \to \Omega$,

$$\gamma_1(s) \coloneqq z_1 \qquad (s \in [0,1]).$$

Definimos $H \colon [0,1]^2 \to \Omega$,

$$H(s,t) \coloneqq (1-t)\gamma_0(s) + t z_1 \qquad (s,t \in [0,1]).$$

Es fácil ver que H es una homotopía entre γ_0 y γ_1 en Ω. $\square$

Lema 6. *Sea γ un camino continuamente derivable por trozos tal que $\gamma^* \subseteq 1+\mathbb{D}$. Entonces,* $\operatorname{ind}_\gamma(0) = 0$.

Demostración. Denotemos por L al logaritmo de Mercator. Esta función está definida en $1+\mathbb{D}$ mediante la siguiente serie:

$$L(z) \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(z-1)^k}{k}.$$

Es fácil ver que el radio de convergencia de esta serie es 1. En el disco $1+\mathbb{D}$, podemos derivar la serie término a término:

$$L'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}(z-1)^{k-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (z-1)^j = \frac{1}{1+(z-1)} = \frac{1}{z}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}_\gamma(0) &= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(s)\,\mathrm{d}s}{\gamma(s)} = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\alpha^\beta L'(\gamma(s))\,\gamma'(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_\alpha^\beta (L\circ\gamma)'(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \Big(L(\gamma(\beta)) - L(\gamma(\alpha)) \Big) = 0.
\end{aligned}$$

□

Lema 7. *Sean $\gamma_0, \gamma_1 \colon [0,1] \to \mathbb{C}$ dos caminos cerrados en $\mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tales que*

$$|\gamma_1(s) - \gamma_0(s)| < |\alpha - \gamma_0(s)| \qquad (s \in [0,1]). \tag{1}$$

Entonces, $\operatorname{ind}_{\gamma_1}(\alpha) = \operatorname{ind}_{\gamma_0}(\alpha)$.

Demostración. La condición (1) implica que para cada s en $[0,1]$,

$$|\alpha - \gamma_0(s)| > 0, \qquad |\alpha - \gamma_1(s)| \ge |\alpha - \gamma_0(s)| - |\gamma_1(s) - \gamma_0(s)| > 0.$$

Definimos $q\colon [0,1] \to \mathbb{C}$,

$$q(s) \coloneqq \frac{\gamma_1(s) - \alpha}{\gamma_0(s) - \alpha} \qquad (s \in [0,1]).$$

Entonces, $q(0) = q(1)$, $|q(s)| < 1$ para cada s en $[0,1]$, y

$$\frac{q'(s)}{q(s)} = \frac{\gamma_1'(s)}{\gamma_1(s) - \alpha} - \frac{\gamma_0'(s)}{\gamma_0(s) - \alpha}.$$

Integremos ambos lados de la igualdad sobre $[0,1]$:

$$\operatorname{ind}_q(0) = \operatorname{ind}_{\gamma_1}(\alpha) - \operatorname{ind}_{\gamma_0}(\alpha).$$

Por el Lema 6, $\operatorname{ind}_q(0) = 0$. Concluimos que $\operatorname{ind}_{\gamma_1}(\alpha) = \operatorname{ind}_{\gamma_0}(\alpha)$. □

Teorema 8 (sobre el índice de un punto respecto a dos caminos homotópicos)**.** *Si Ω es una región, γ_0 y γ_1 son caminos cerrados en Ω, continuamente derivables a trozos, Ω-homotópicos, y $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, entonces,*

$$\operatorname{ind}_{\gamma_0}(\alpha) = \operatorname{ind}_{\gamma_1}(\alpha).$$

Demostración. Por la definición de caminos Ω-homotópicos, existe $H \in C([0,1]^2, \Omega)$ tal que

$$H(s,0) = \gamma_0(s), \qquad H(s,1) = \gamma_1(s), \qquad H(0,t) = H(1,t) \qquad (s,t \in [0,1]).$$

El problema es que las funciones $H(\cdot, t)$ no necesariamente son continuamente derivables a trozos. Vamos a aproximarlas por funciones afines a trozos.

Sea $Y := H\big[[0,1]^2\big]$. Como $[0,1]^2$ es compacto, Y también es compacto. Además, $Y \subseteq \Omega$ y $\alpha \notin \Omega$. Por lo tanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall (s,t) \in [0,1]^2 \qquad |\alpha - H(s,t)| \ge 2\varepsilon. \tag{2}$$

Como H es uniformemente continua, existe n en $\mathbb{N}$ tal que para cualesquiera (s,t) en $[0,1]^2$ y (u,v) en $[0,1]^2$, si

$$|u - s| + |v - t| \le \frac{1}{n},$$

entonces

$$|H(u,v) - H(s,t)| < \varepsilon.$$

Definimos caminos poligonales cerrados $\xi_0, \ldots, \xi_n$ mediante las siguientes reglas:

$$\xi_k(s) := H\left(\frac{j-1}{n}, \frac{k}{n}\right)\big(j - ns\big) + H\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right)\big(ns + 1 - j\big) \qquad (j - 1 \le ns \le j).$$

Es fácil ver que

$$\big|\xi_k(s) - H(s, k/n)\big| < \varepsilon \qquad (k \in \{0, \ldots, n\},\ s \in [0,1]). \tag{3}$$

En particular, para $k = 0$ y $k = n$,

$$\big|\xi_0(s) - \gamma_0(s)\big| < \varepsilon, \qquad \big|\xi_n(s) - \gamma_1(s)\big| < \varepsilon \qquad (s \in [0,1]).$$

Por (3) y (2),

$$|\alpha - \gamma_k(s)| > \varepsilon \qquad (k \in \{0, \ldots, n\},\ s \in [0,1]).$$

Por otro lado, de la construcción de los caminos ξ_k y de la continuidad uniforme de H se sigue que

$$|\xi_{k-1}(s) - \xi_k(s)| < \varepsilon \qquad (k \in \{1, \ldots, n\},\ s \in [0,1]).$$

Por el Lema 7, concluimos que

$$\operatorname{ind}_{\gamma_0}(\alpha) = \operatorname{ind}_{\xi_0}(\alpha) = \operatorname{ind}_{\xi_1}(\alpha) = \cdots = \operatorname{ind}_{\xi_n}(\alpha) = \operatorname{ind}_{\gamma_1}(\alpha). \qquad \square$$