Funciones holomorfas definidas por integrales con parámetros

Egor Maximenko: La idea del siguiente teorema es muy conocida, por no he podido encontrar esta versión general en literatura. Agradezco a Jesús Alberto Flores Hinostrosa y Julio Eduardo Enciso Molina por pensar juntos en los detalles de este teorema.

Objetivos. Mostrar cómo definir funciones holomorfas por medio de integrales con un parámetro.

Prerrequisitos. Teorema integral de Cauchy–Goursat, teorema de Morera, el criterio de Heine de continuidad en términos de sucesiones, teorema de Fubini, teorema de Tonelli.

Aplicaciones. Teoremas tipo Paley–Wiener sobre las funciones holomorfas definidas por medio de la transformada de Fourier extendida.

Observación 1 (notación para una función de dos variables con una variable fija)**.** Sea $f\colon X \times D \to \mathbb{C}$. Para cada a en X, definimos $f_{1,a}\colon D \to \mathbb{C}$,

$$f_{1,a}(z) \coloneqq f(a, z).$$

Para cada b en D, definimos $f_{2,b}\colon X \to \mathbb{C}$,

$$f_{2,b}(x) \coloneqq f(x, b).$$

Teorema 2. *Sean D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita, $f\colon X \times D \to \mathbb{C}$ una función con las siguientes propiedades:*

1) f es medible;

2) para cada x en X, $f_{1,x} \in H(D)$;

3) para cada subconjunto compacto K de D, la función $h_K\colon X \to [0, +\infty)$, definida como

$$h_K(x) \coloneqq \sup_{w \in K} |f(x, w)|,$$

es de clase $\mathcal{L}^1(X, \mu)$.

Definimos $g\colon D \to \mathbb{C}$,

$$g(z) \coloneqq \int_X f_{2,z}\, \mathrm{d}\mu.$$

Entonces, $g \in H(D)$.

Observación 3. La condición 2) se puede escribir en otra notación:

$$\forall a \in X \qquad f(a,\cdot) \in H(D).$$

La condición 3) en otra notación: para cada subconjunto compacto K de D,

$$\int_X \left(\sup_{w\in K} |f(x,w)| \right) \mathrm{d}\mu(x) < +\infty.$$

La definición de g en otra notación:

$$g(z) \coloneqq \int_X f(x,z)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Demostración. 1. Para cada z en D, aplicando la suposición 3) con $K = \{z\}$, vemos que $f_{2,z}$ es Lebesgue integrable. Por lo tanto, g está bien definida.

2. Mostremos que g es continua en D. Dado b en D, mostremos que g es continua en el punto b. Usamos el criterio de Heine de continuidad en términos de sucesiones. Sea $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión en D que converge al punto b. Pongamos

$$K \coloneqq \{c_j\colon\ j \in \mathbb{N}\} \cup \{b\}.$$

Entonces, K es un subconjunto compacto de D. La sucesión $(f_{2,c_j})_{j\in\mathbb{N}}$ está dominada por la función h_K:

$$\forall j \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in X \qquad |f(x,c_j)| \le h_K(x).$$

Para cada x en X, la función $f_{1,x}$ es continua, por eso la sucesión numérica $(f(x,c_j))_{j\in\mathbb{N}}$ converge al número $f(x,b)$. En otras palabras, la sucesión de funciones $(f_{2,c_j})_{j\in\mathbb{N}}$ converge a la función $f_{2,b}$ de manera puntual. Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue,

$$\lim_{j\to\infty} g(c_j) = \lim_{j\to\infty} \int_X f_{2,c_j}\,\mathrm{d}\mu = \int_X f_{2,b}\,\mathrm{d}\mu = g(b).$$

Hemos demostrado que $g \in C(D)$.

3. Para demostrar que g es holomorfa, utilizaremos el teorema de Morera. Sean z_1, z_2, z_3 algunos puntos de D tales que $\operatorname{conv}(z_1,z_2,z_3) \subseteq D$. Sea $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ el camino formado por los tres segmentos que unen z_1 con z_2, z_2 con z_3 y z_3 con z_1:

$$\gamma(t) \coloneqq \begin{cases} (1-3t)z_1 + 3tz_2, & 0 \le t \le 1/3; \\ (2-3t)z_2 + (3t-1)z_3, & 1/3 \le t \le 2/3; \\ (3-3t)z_3 + (3t-2)z_1, & 2/3 \le t \le 1. \end{cases}$$

Sea $K \coloneqq \gamma([0,1])$ y sea

$$C \coloneqq 3\max\{|z_2 - z_1|, |z_3 - z_2|, |z_1 - z_3|\}.$$

Notamos que K es un subconjunto compacto de D. Definimos $\eta\colon [0,1] \to \mathbb{C}$,

$$\eta(t) := \begin{cases} \gamma'(t), & t \in [0,1] \setminus \{1/3, 2/3\}, \\ 0, & t \in \{1/3, 2/3\}. \end{cases}$$

Entonces, $|\gamma'(t)| \le C$ para cada t en $[0,1]$. Definimos $u\colon X \times [0,1] \to \mathbb{C}$, $v\colon X \times [0,1] \to [0,+\infty)$

$$u(x,t) := f(x,\gamma(t))\,\eta'(t), \qquad v(x,t) := |u(x,t)|.$$

La condición 1) implica que u y v son medibles. Para cada x en X y casi cada t en $[0,1]$, podemos acotar $v(x,t)$ de la siguiente manera:

$$v_{2,t}(x) = v(x,t) = |u(x,t)| = |f(x,\gamma(t))|\,|\eta(t)| \le C h_K(x).$$

Sea λ la medida de Lebesgue. La suposición 2) y el teorema de Tonelli implican que v es integrable:

$$\begin{aligned} \int\limits_{X\times[0,1]} v\,\mathrm{d}(\mu\times\lambda) &= \int\limits_{[0,1]} \left(\int\limits_{X} v_{2,t}\,\mathrm{d}\mu \right) \mathrm{d}\lambda \\ &\le C \int\limits_{[0,1]} \left(\int\limits_{X} h_K\,\mathrm{d}\mu \right) \mathrm{d}\mu = C \int\limits_{X} h_K\,\mathrm{d}\mu < +\infty. \end{aligned}$$

Ahora podemos aplicar el teorema de Fubini a la función u. Tenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\gamma} g(z)\,\mathrm{d}z &= \int\limits_{[0,1]} g(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{[0,1]} g(\gamma(t))\,\eta(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int\limits_{[0,1]} \left(\int\limits_{X} f_{2,\gamma(t)}\,\mathrm{d}\mu \right) \eta(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{X} \left(\int\limits_{[0,1]} f_{1,x}(\gamma(t))\,\eta(t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int\limits_{X} \left(\int\limits_{\gamma} f_{1,x}(z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\mu(x). \end{aligned}$$

Por la suposición 1) y el teorema de Cauchy–Goursat, la integral interior es 0. Como $\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = 0$ para cada camino triangular γ contenido en D junto con su interior, por el teorema de Morera concluimos que $g \in H(D)$. $\square$