Convergencia de la serie que define la función exponencial

Objetivos. Demostrar que la serie
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \tag{1}$$
converge de manera absoluta para cada z en $\mathbb{C}$. Demostrar que esta serie converge de manera uniforme en cada subconjunto acotado de $\mathbb{C}$.

Prerrequisitos. Límites, convergencia de series, convergencia absoluta de series. Para entender mejor este tema, es recomendable estudiar la convergencia de series de potencias y la fórmula de Cauchy–Hadamard.

Aplicaciones. Definir la función exponencial por medio de la serie de potencias y demostrar de manera rigurosa sus propiedades.

Camino que utiliza la fórmula de Cauchy–Hadamard

Repaso 1 (la fórmula de Cauchy–Hadamard y la convergencia de las series de potencias)**.** Sea $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ y sea
$$L \coloneqq \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$
Pongamos
$$R \coloneqq \begin{cases} 1/L, & 0 < L < +\infty; \\ 0, & L = +\infty; \\ +\infty, & L = 0. \end{cases}$$
Entonces, la serie
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$
converge de manera absoluta en el disco $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < R\}$. Más aún, para cada r tal que $0 < r < R$, esta serie converge de manera uniforme en el disco $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| \le r\}$. Más aún, la serie no converge para $|z| > R$.

Proposición 2. $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k!} = +\infty$

Demostración. Denotemos el k-ésimo elemento de esta sucesión por x_k:
$$x_k \coloneqq \sqrt[k]{k!} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$
Sea $G > 0$. Queremos encontrar un m en $\mathbb{N}$ tal que si $k \ge m$, entonces $x_k > G$.

Sea $h \coloneqq \lfloor G^2 \rfloor + 1$ y sea $m \coloneqq 2h$. Notamos que si $k \ge m$, entonces

$$k! = \prod_{j=1}^{k} j \ge \prod_{j=h+1}^{k} j \ge h^{k-h} > (G^2)^{k-h} = G^{k+(k-2h)} \ge G^k.$$

Por lo tanto, para $k \ge m$,

$$x_k = \sqrt[k]{k!} > G. \qquad \square$$

Proposición 3. *La serie (1) tiene radio de convergencia $+\infty$. En particular, la serie (1) converge de manera absoluta para cada z en $\mathbb{C}$. Más aún, para cada $r > 0$, la serie converge de manera uniforme en el disco $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| \le r\}$.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 2 y de la fórmula de Cauchy–Hadamard. $\square$

Camino que no utiliza la fórmula de Cauchy–Hadamard

Repaso 4 (la suma de la progresión geométrica)**.** Si $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ y $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$\sum_{k=0}^{m-1} q^k = \frac{q^m - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^m}{1 - q}.$$

Si $q \in \mathbb{C}$ y $|q| < 1$, entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}.$$

Lema 5 (una cota superior para los términos de la serie que define la función exponencial)**.** *Si $r > 0$, $m \coloneqq 2\lfloor 4r^2 \rfloor + 2$ y $k \ge m$, entonces*

$$\frac{r^k}{k!} \le \frac{1}{2^k}.$$

Demostración. Sea $h \coloneqq \lfloor 4r^2 \rfloor + 1$. Escribimos m como $2h$. Para cada $k \ge m$,

$$k! = \prod_{j=1}^{k} j \ge \prod_{j=h+1}^{k} j > (4r^2)^{k-h} = (2r)^{k+(k-2h)} \ge (2r)^k.$$

Por lo tanto,

$$\frac{r^k}{k!} \le \frac{r^k}{(2r)^k} = \frac{1}{2^k}. \qquad \square$$

Teorema 6. *Para cada z en $\mathbb{C}$, la serie (1) converge de manera absoluta:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} < +\infty.$$

Más aún, si $r > 0$, $|z| \le r$, $N \coloneqq 2\lfloor 4r^2 \rfloor + 2$ y $n \ge N$, entonces

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} \le \frac{1}{2^n}.$$

Demostración. 1. Sea $z \in \mathbb{C}$. Pongamos $r \coloneqq |z|$ y definimos m como en el Lema 5. Entonces, para cada $k \geq m$,

$$\sum_{j=0}^{k} \left| \frac{z^j}{j!} \right| \leq \sum_{j=0}^{m} \frac{r^j}{j!} + \sum_{j=m+1} \frac{r^j}{j!} \leq \sum_{j=0}^{m} \frac{r^j}{j!} + \sum_{j=m+1} \frac{1}{2^j} = \sum_{j=0}^{m} \frac{r^j}{j!} + \frac{1}{2^m} < +\infty.$$

La cota también se tiene para $k \leq m$. Hemos demostrado que las sumas parciales de la serie $\sum_{j=0}^{\infty} |z|^j/j!$ son acotadas. Por lo tanto, la serie converge.

2. Sean $r > 0$, $|z| \leq r$, $N \coloneqq 2\lfloor 4r^2 \rfloor + 2$ y $n \geq N$. Entonces, por el Lema 5,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}.$$

□