

# El teorema de Liouville

## sobre las funciones enteras holomorfas acotadas

**Objetivos.** Demostrar el teorema de Liouville sobre las funciones enteras holomorfas acotadas.

**Aplicaciones.** El fundamental del álgebra.

**Prerrequisitos.** La identidad de Parseval para las funciones analíticas. Equivalencia entre las funciones holomorfas y analíticas.

**Teorema 1** (la identidad de Parseval para las series de potencias, repaso). Sea  $c \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$  y sea  $a \in \mathbb{C}$ . Denotemos por  $R$  el radio de convergencia de la siguiente serie de potencias y por  $f$  su suma:

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k \quad (|z - a| < R). \quad (1)$$

Entonces, para cada  $r$  que satisface  $0 < r < R$ ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + r e^{i\vartheta})|^2 d\vartheta. \quad (2)$$

**Definición 2.** Una función  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  se llama *entera* si  $f$  es holomorfa en  $\mathbb{C}$ .

**Teorema 3** (Liouville). Cada función acotada entera es constante.

*Demostración.* Supongamos que  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es una función acotada entera. Denotemos por  $M$  el supremo de  $f$ :

$$M := \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|.$$

Entonces,  $M < +\infty$ . Ya sabemos que las funciones holomorfas son analíticas. Entonces, se tiene la descomposición (1) con  $a = 0$  y  $R = +\infty$ :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad (z \in \mathbb{C}). \quad (3)$$

Para cada  $m$  en  $\mathbb{N}$  y cada  $r > 0$ , obtenemos

$$r^{2m} |c_m|^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r e^{i\vartheta})|^2 d\vartheta \leq M^2.$$

De aquí,

$$|c_m| \leq \frac{M}{r^m}.$$

Esta desigualdad se tiene para cada  $r > 0$ . Pasamos al límite cuando  $r \rightarrow +\infty$  y obtenemos que  $c_m = 0$ . Esto se tiene para cada  $m > 0$ . Por (3), para cada  $z$  en  $\mathbb{C}$  obtenemos que

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = c_0 = f(0). \quad \square$$

**Definición 4** (biholomorfismo entre dos subconjuntos abiertos de  $\mathbb{C}$ ). Sean  $X, Y$  subconjuntos abiertos de  $\mathbb{C}$ . Una función  $f: X \rightarrow Y$  se llama *biholomorfa* si  $f$  es biyectiva,  $f$  es holomorfa y su inversa  $f^{-1}$  también es holomorfa.

**Corolario 5.** *No existe ningún biholomorfismo entre  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{D}$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$  es biholomorfa. Entonces,  $f$  es entera y acotada. Por el teorema de Liouville, su imagen  $f[\mathbb{C}]$  es un conjunto unipuntual. Por otro lado, como  $f$  es biyectiva,  $f[\mathbb{C}] = \mathbb{D}$ . Contradicción.  $\square$