Algunos problemas avanzados de cálculo

Egor Maximenko: Estos problemas de cálculo se resuelven con herramientas elementales que se estudian en los primeros semestres de licenciatura, pero necesitan cierta experiencia o ciertos esfuerzos. Recomiendo estos problemas a buenos estudiantes de licenciatura y a todos los estudiantes de posgrado cuya área de investigación está relacionada con análisis (análisis real, complejo, funcional o armónico). Casi todos los problemas son bien conocidos, los encontré en varias fuentes.

Usamos la notación $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Límites

Problema 1. Construir una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de números positivos con las siguientes propiedades:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty,$$

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad \exists n \geq m \qquad x_{m+1} < x_m.$$

En otras palabras, la sucesión debe tener límite $+\infty$, pero no debe ser creciente a partir de cierto momento.

Problema 2. Calcular el límite de la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dada por una condición inicial y por una regla recursiva:

$$x_1 = 0, \qquad x_n = \sqrt{12 + x_{n-1}}.$$

Problema 3. Sea $a > 1$. Consideremos la sucesión $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ definida mediante una condición inicial y una fórmula recursiva:

$$x_0 = a, \qquad\qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Demostrar que esta sucesión tiende a $\sqrt{a}$. Se recomienda demostrar que la sucesión es decreciente, que todos sus elementos son mayores que $\sqrt{a}$, que $|x_1 - \sqrt{a}| < 1$, y que existe C tal que $0 < C < 1$ y para cada n en $\mathbb{N}$,

$$|x_{n+1} - \sqrt{a}| \leq C|x_n - \sqrt{a}|^2.$$

Luego demostrar que $|x_n - a|$ se acota por una progresión geométrica que tiende a 0.

Problema 4. Sea $a > 0$. Calcular el límite

$$\lim_{x\to a} \frac{x^x - a^a}{x - a}.$$

Problema 5. Sea $a > 0$. Calcular el límite

$$\lim_{x\to a} \frac{x^{x^x} - a^{a^a}}{x - a}.$$

Problema 6. Calcular el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg}(x)) - \operatorname{tg}(\operatorname{sen}(x))}{\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{arc\,tg}(x)) - \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{arc\,sen}(x))}.$$

Problema 7. Calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{n} + \cos\frac{2}{n} + \ldots + \cos\frac{n}{n}}{n}.$$

Problema 8. Sea $\alpha > 0$. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \ldots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}.$$

Problema 9. Sean $a_1, \ldots, a_m > 0$. Calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_1^n + \cdots + a_m^n\right)^{1/n}.$$

Problema 10. Consideremos la suceción de funciones $(f_n)_{n=1}^\infty$, $f_n\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, definidas mediante la regla:

$$f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right) \qquad \forall x \in (0,+\infty) \quad \forall n \in \{1,2,3,\ldots\}.$$

Calcular el límite puntual de esta sucesión y determinar si la convergencia es uniforme o no.

Problema 11. Demostrar la fórmula de Stirling:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Problema 12. Calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^n}{n!}\right)^{1/n}.$$

Series

Problema 13. Calcular la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3 + 12n^2 + 47n + 60}.$$

Problema 14. Sean $t, a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$. Calcular las sumas de las series

$$\sum_{n=0}^\infty a^n \cos(nt), \qquad \sum_{n=1}^\infty a^n \operatorname{sen}(nt).$$

Problema 15. Deducir una fórmula para la función A definida como la suma de la siguiente serie:

$$A(x) = \sum_{n=1}^\infty (n+1)x^n \qquad (|x| < 1).$$

Problema 16. Demostrar los teoremas de Abel y Dirichlet sobre la convergencia de series.

Problema 17. Deducir una fórmula para la función A definida como la suma de la siguiente serie:

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad (|x| < 1).$$

Calcular la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Problema 18. Denotemos por H_n al n-ésimo *número armónico*:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Demostrar que para todo n entero positivo,

$$\ln(n+1) \le H_n \le \ln(n) + 1.$$

Problema 19. Deducir una fórmula directa para la sucesión de Fibonacci $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ definida por una fórmula recursiva y por dos condiciones iniciales:

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad (n \ge 2).$$

Indicación: calcular la suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n.$$

Problema 20. Denotamos por $\mathbb{P}$ al conjunto de los números primos. Demostrar que para cada $s > 1$ se cumple la fórmula

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Sugerencia. Si $p_1, \ldots, p_m$ son algunos números primos, diferentes a pares, demostrar que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right) \left(\sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_k^s} \right) \right) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ p_1 \nmid n, \ldots, p_m \nmid n}} \frac{1}{n^s}.$$

Problema 21. Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Funciones continuas

Problema 22. Sea $f\colon [3,5] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$\min_{x\in[3,5]} f(x) = 37, \qquad \max_{x\in[3,5]} f(x) = 57.$$

Demostrar que existe por lo menos un punto $c \in [3,5]$ tal que $f(c) = 10c + 7$.

Problema 23. Sean $p > 1$, $L > 0$ y sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que para cualesquier $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple la desigualdad

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y|^p.$$

Demostrar que f es una constante.

Problema 24. Encontrar una función $f\colon [0,1] \to [0,1]$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \qquad (x, y \in [0,1],\ x \ne y),$$

pero no existe $M < 1$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \le M|x - y| \qquad (x, y \in [0,1]).$$

Problema 25. Sea $f\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua en $[0,1)$. Demuestre que existe un límite finito de $f(x)$ cuando x tiende a 1.

Problema 26. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua, y sea $f(0) = 0$. Demuestre que existe un $B > 0$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}$ se cumple la desigualdad

$$|f(x)| \le 1 + B|x|.$$

Derivadas

Problema 27. Consideremos la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Demostrar que f es biyectiva y calcular la derivada de su inversa.

Problema 28. Demostrar que para cada $x > 0$,

$$\operatorname{sen}(x) > x - \frac{x^3}{6}.$$

Problema 29. Calcular $f^{(2016)}(0)$, donde

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 6}.$$

Problema 30. Calcular $f^{(2016)}(0)$, donde

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x).$$

Problema 31. Sea $\mu > 0$. Calcular el supremo:

$$\sup\left\{\frac{a^\mu + b^\mu}{(a+b)^\mu}:\ \ a, b > 0\right\}.$$

Problema 32. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces continuamente derivable en $\mathbb{R}$. Para $k \in \{0, 1, 2\}$ denotemos por M_k al supremo del valor absoluto de la k-ésima derivada de f:

$$M_k := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)| \qquad (k = 0, 1, 2).$$

Demostrar que

$$M_1 \le 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

Problema 33. Sea A una matriz $n \times n$ con entradas reales. Definimos $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mediante la fórmula

$$f(x) = x^\top A x \qquad (x \in \mathbb{R}^n),$$

donde el vector x se trata como columna, y $x^\top$ es el vector transpuesto (vector renglón). Calcular el gradiente de la función f' en un punto general x.

Problema 34. Sea A una matriz $n \times n$ con entradas reales. Definimos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante la regla

$$f(x) = \det(I_n + xA),$$

donde I_n es la matriz identidad $n \times n$ y det es la función determinante. Calcular $f'(0)$.

Problema 35. Demostrar que $x^y + y^x > 1$ para toda $x, y > 0$.

Problema 36. Sea $t \in [0, \pi/2]$. Demostrar que

$$\operatorname{sen}(t) \ge \frac{2}{\pi} t.$$

Problema 37. Sean $t, p \in \mathbb{R}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, $0 < p < 1$. Demostrar que

$$(\cos t)^p \le \cos(pt).$$

Problema 38. ¿Cuál número es más grande, 3^π o π^3? Generalizar el resultado.

Integrales

Problema 39. Calcular las integrales (suponiendo $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$):

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(bx)\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-ax}\operatorname{sen}(bx)\,dx.$$

Problema 40. Calcular la integral

$$\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}(x))^{2016}\,dx.$$

Problema 41. Calcular la integral de Gauss (también conocida como la integral de Euler y de Poisson), justificando bien todos los pasos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Problema 42. Calcular la integral de Dirichlet (la cual se define como una integral impropia):

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx.$$

Problema 43. Sea $a > 0$. Calcular el valor promedio de la función $\ln(x^2+y^2)$ en la circunferencia

$$(x-a)^2 + y^2 = 1.$$

Problema 44. Para cada $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ denotemos por S_n a la integral

$$S_n = \int_{0}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{\operatorname{sen}(x)}\,dx.$$

Encontrar una fórmula recursiva para S_n. Utilizando la fórmula encontrada calcular S_4, S_5, S_6.

Problema 45. Sea $n \in \{2, 3, \ldots\}$. Encontrar una función $g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que para toda función continua $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ se cumpla la igualdad

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{x_1}\ldots\int_{0}^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n \cdots dx_2\,dx_1 = \int_{0}^{1} g_n(t) f(t)\,dt.$$

Problema 46. Sea $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ una función continua de soporte compacto (es decir, existe un $b > 0$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x > b$). Definimos la función $g\colon (0,+\infty) \to [0,+\infty)$ de la siguiente manera:

$$\forall x > 0 \qquad g(x) = \frac{1}{x}\int_{0}^{x} f(x)\,dx.$$

Sea $p > 1$. Demostrar la desigualdad de Hardy:

$$\int_{0}^{+\infty} g(x)^p\,dx \le \frac{p}{p-1}\int_{0}^{+\infty} f(x)^p\,dx.$$

Problema 47. Sea f un polinomio de una variable real. Calcular el límite

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{+\infty} t\,e^{-xt} f(x)\,dx.$$

Problema 48. Sean $x, y > 0$. Calcular la integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t} \, dt.$$

Problema 49. Calcular $F'(0)$, donde la función $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida mediante la regla

$$F(x) = \int_{\operatorname{sen}(x)}^{\cos(x)} e^{t^2+xt} \, dt.$$

Problema 50. Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[0,1]$. Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x) \, dx, \qquad \lim_{n\to\infty} n \int_0^1 x^n f(x) \, dx.$$