Topología débil-* y convergencia de redes

Objetivos. Demostrar que la convergencia en la topología débil-* es equivalente a la convergencia puntual.

Prerrequisitos. Subbases de topología, convergencia de redes.

En este tema suponemos que V es un espacio de Banach.

1 Definición (topología débil-* en V^*)**.** Para cada f en V^*, x en V, $\varepsilon > 0$, pongamos

$$U_{f,x,\varepsilon} \coloneqq \big\{h \in V^* \colon\ |h(x) - f(x)| < \varepsilon\big\}.$$

Sea

$$\mathcal{U} \coloneqq \big\{U_{f,x,\varepsilon} \colon\ f \in V^*,\ x \in V,\ \varepsilon > 0\big\}.$$

Sea $\tau_w(V^*)$ la topología generada por $\mathcal{U}$, es decir, la más pequeña entre todas las topologías que contienen a la colección $\mathcal{U}$.

Dado un elemento f de V^*, vamos a construir su *base local* (se puede revisar el concepto en libros de topología).

2 Definición. Para cada f en V^*, m en $\mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m$ en V y $\varepsilon > 0$, pongamos

$$U_{f,(x_1,\ldots,x_m),\varepsilon} \coloneqq \big\{h \in V^* \colon\quad \forall k \in \{1, \ldots, m\}\quad |h(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon\big\}.$$

3 Proposición. *Para cada f en V^*, m en $\mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m$ en V y $\varepsilon > 0$, $U_{f,(x_1,\ldots,x_m),\varepsilon}$ es una vecindad abierta de f en la topología $\tau_w(V^*)$.*

Demostración. En efecto, $f \in U_{f,(x_1,\ldots,x_m),\varepsilon}$ y

$$U_{f,(x_1,\ldots,x_m),\varepsilon} = \bigcap_{k=1}^{m} U_{f,x_k,\varepsilon}.$$ □

4 Proposición. *Sea $f \in V^*$ y sea A una vecindad abierta de f en la topología $\tau_w(V^*)$. Entonces, existen m en $\mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m$ en V y $\varepsilon > 0$ tales que*

$$U_{f,(x_1,\ldots,x_m),\varepsilon} \subseteq A.$$

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ el conjunto de las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{U}$. Se sabe que $\mathcal{B}$ es una base de la topología $\tau_w(V^*)$, es decir, cada conjunto abierto en $\tau_w(V^*)$ es una unión de una subcolección de $\mathcal{B}$.

Elegimos $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $A = \cup\mathcal{C}$. Como $f \in A$, existe B en $\mathcal{C}$ tal que $f \in B$. Por la definición de B, existen m en $\mathbb{N}$, $g_1, \ldots, g_m$ en V^*, $x_1, \ldots, x_m$ en V y $\delta_1, \ldots, \delta_m > 0$ tales que

$$B = \bigcap_{k=1}^{m} U_{g_k, x_k, \delta_k}.$$

Como $f \in B$, para cada k tenemos que

$$|f(x_k) - g_k(x_k)| < \delta_k.$$

En otras palabras,

$$\delta_k - |f(x_k) - g_k(x_k)| > 0.$$

Pongamos

$$\varepsilon \coloneqq \min_{k \in \{1,\ldots,m\}} \big(\delta_k - |f(x_k) - g_k(x_k)|\big).$$

Mostremos que

$$U_{f,(x_1,\ldots,x_m),\varepsilon} \subseteq B.$$

En efecto, si $h \in U_{f,(x_1,\ldots,x_m),\varepsilon}$, entonces para cada k en $\{1, \ldots, m\}$ tenemos que

$$\begin{aligned} |h(x_k) - g_k(x_k)| &\leq |h(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - g_k(x_k)| < \varepsilon + |f(x_k) - g_k(x_k)| \\ &\leq \delta_k - |f(x_k) - g_k(x_k)| + |f(x_k) - g_k(x_k)| = \delta_k. \end{aligned}$$

Concluimos que $U_{f,(x_1,\ldots,x_m),\varepsilon} \subseteq B \subseteq A$. □

5 Proposición. *Sea $(J, \succeq)$ un conjunto dirigido, sea $s\colon J \to V^*$ una red y sea $f \in V^*$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $s_j \xrightarrow[j \in J]{\tau_w(V^*)} f$;

(b) para cada x en V, $s_j(x) \xrightarrow[j \in J]{} f(x)$.

Demostración. (a)⇒(b). Supongamos que se cumple (a). Sea $x \in V$ y sea $\varepsilon > 0$. El conjunto $U_{f,x,\varepsilon}$ es una vecindad abierta de f en la topología $\tau_w(V^*)$. Por lo tanto, existe j en J tal que para cada k en J con $k \succeq j$, $s_k \in U_{f,x,\varepsilon}$. Pero esto significa que

$$\forall k \succeq j \qquad |s_j(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Hemos demostrado que $s_j(x) \xrightarrow[j \in J]{} f(x)$.

(b)⇒(a). Supongamos que se cumple la condición (b). Demostremos (a). Sea A una vecindad abierta de f. Usando la Proposición 4, elegimos m en $\mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m$ en V y $\varepsilon > 0$ tales que

$$U_{f,(x_1,\ldots,x_m),\varepsilon} \subseteq A.$$

Para cada r en $\{1, \ldots, m\}$, usando el hecho que $s_j(x_r) \xrightarrow[j\in J]{} f(x_r)$, encontramos p_r en J tal que para cada j en J con $j \succeq p_r$,

$$|s_j(x_r) - f(x_r)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Elegimos q en J tal que $q \succeq p_1, \ldots, p_m$. Para cada j en J con $j \succeq q$, para cada r en $\{1, \ldots, m\}$ se cumple (1), así que

$$s_j \in U_{f,(x_1,\ldots,x_m),\varepsilon} \subseteq A.$$

Hemos demostrado que $s_j \xrightarrow[j\in J]{\tau_w(V^*)} f$. □