Varias formas equivalentes del grupo $\mathbb{T}$

Objetivos. Conocer varias formas equivalentes del grupo $\mathbb{T}$:

$$\mathbb{T}, \qquad \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}), \qquad [0, 2\pi).$$

En este tema no vamos a trabajar mucho con la topología de estos conjuntos.

Requisitos. Números complejos, grupo cociente, medida de Lebesgue.

El grupo $\mathbb{T}$

Definición 1. $\mathbb{T} \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \colon \ |z| = 1\}$.

$\mathbb{T}$ se considera con la operación de multiplicación inducida de $\mathbb{C}$.

Proposición 2. $\mathbb{T}$ *es un grupo conmutativo.*

Demostración. Sabemos que la multiplicación en $\mathbb{C}$ es asociativa y conmutativa. Si $z, w \in \mathbb{T}$, entonces

$$|zw| = |z|\,|w| = 1,$$

así que $zw \in \mathbb{C}$. Más aún, si $z \in \mathbb{T}$, entonces $z^{-1} = \overline{z}$ y

$$|z^{-1}| = |\overline{z}| = |z| = 1,$$

así que $z^{-1} \in \mathbb{T}$. Finalmente, $|1| = 1$, por eso $1 \in \mathbb{T}$. $\square$

La siguiente proposición es una consecuencia de propiedades básicas de la función exponencial compleja. Se recomienda definir la función exponencial por medio de la serie de potencias y demostrar sus propiedades principales.

Proposición 3. *Definimos* $E \colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$,

$$E(x) \coloneqq \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}.$$

Entonces E es un epimorfismo y $\ker(E) = 2\pi\mathbb{Z}$.

El grupo $\mathbb{R}_{2\pi}$

Denotamos por $\mathbb{R}_{2\pi} \coloneqq \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ al grupo cociente. La operación en $\mathbb{R}_{2\pi}$ satisface la siguiente regla (que se puede aceptar como definición): si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces

$$(x + 2\pi\mathbb{Z}) + (y + 2\pi\mathbb{Z}) = (x + y) + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Proposición 4. *Existe una única función* $\varphi \colon \mathbb{R}_{2\pi} \to \mathbb{T}$ *tal que*

$$\varphi(x + 2\pi\mathbb{Z}) \coloneqq \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

La función φ es un isomorfismo de grupos.

Demostración. Se aplica la Proposición 3 y el primer teorema de isomorfismos de grupos. $\square$

$[0, 2\pi)$ como un grupo

Definición 5. En el conjunto $[0, 2\pi)$ definimos una operación binaria $\oplus$ mediante la siguiente regla:

$$a \oplus b := \begin{cases} a + b, & \text{si } a + b < 2\pi; \\ a + b - 2\pi, & \text{si } a + b \geq 2\pi. \end{cases}$$

Proposición 6. $[0, 2\pi)$ *con esta operación es un grupo conmutativo. La función* $\psi\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$*, definida como*

$$\psi(x) := x + 2\pi\mathbb{Z},$$

es un isomorfismo de grupos.

Demostración. 1. Mostremos que ψ es inyectiva. Si $a, b \in [0, 2\pi)$ y $a < b$, entonces $0 < b - a < 2\pi$. Por lo tanto, $b - a \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Como los elementos a y b no son congruentes, sus clases de equivalencia son diferentes, y $\psi(a) \neq \psi(b)$.

2. Mostremos que ψ es sobre. Sea $X \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$. Encontramos $x \in \mathbb{R}$ tal que $X = x + 2\pi\mathbb{Z}$. Pongamos

$$k := \left\lfloor \frac{x}{2\pi} \right\rfloor, \qquad a := x - 2k\pi.$$

Entonces $k \in \mathbb{Z}$ y

$$k \leq \frac{x}{2\pi} < k + 1.$$

Esto implica que $2k\pi \leq x < 2k\pi + 2\pi$ y

$$0 \leq a < 2\pi.$$

Como $x = a + 2k\pi$, tenemos que $\psi(a) = \psi(x) = X$.

3. Mostremos que ψ convierte la operación $\oplus$ en la adición usual en $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$. Sean $a, b \in [0, 2\pi)$.

$$\psi(a) = a + 2\pi\mathbb{Z}, \qquad \psi(b) = b + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Si $a + b < 2\pi$, entonces $a \oplus b = a + b$ y

$$\psi(a \oplus b) = \varphi(a + b) = (a + b) + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Si $a + b \geq 2\pi$, entonces $a \oplus b = a + b - 2\pi$ y

$$\psi(a \oplus b) = \psi(a + b - 2\pi) = (a + b - 2\pi) + 2\pi\mathbb{Z} = (a + b) + 2\pi\mathbb{Z}.$$

En ambos casos,

$$\psi(a \oplus b) = \psi(a) + \psi(b).$$

4. Como ψ es una biyección, $\mathbb{R}_{2\pi}$ es un grupo y ψ convierte la operación $\oplus$ en la operación del grupo $\mathbb{R}_{2\pi}$, concluimos que $[0, 2\pi)$ con la operación $\oplus$ también es un grupo. Ahora podemos decir que ψ es un isomorfismo de grupos. □

Proposición 7. *Definimos* $\eta\colon [0,2\pi) \to \mathbb{T}$,

$$\eta(a) \coloneqq \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,a}.$$

Entonces η *es isomorfismo de grupos.*

Ejercicio 8. Sin usar el grupo $\mathbb{R}_{2\pi}$, demostrar de manera directa que $\eta(a \oplus b) = \eta(a)\eta(b)$, Sin usar el grupo $\mathbb{R}_{2\pi}$, demostrar que $\mathbb{R}_{2\pi}$ es un grupo y η es un isomorfismo.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{T} & \\
([0,2\pi),\oplus) \arrow[ur, "\eta"] \arrow[rr, "\psi"] & & \mathbb{R}_{2\pi} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \arrow[ul, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

Topología

Proposición 9. $\mathbb{T}$ *con la topología inducida de* $\mathbb{C}$ *es un espacio topológico compacto.* $\mathbb{T}$ *es un grupo topológico.*

Demostración. $\mathbb{T}$ es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{C}$. Se sabe que $\mathbb{C}$ es un campo normado, por eso la multiplicación en $\mathbb{C}$ es una operación continua. Por lo tanto, es continua su restricción a $\mathbb{T}$. Sabemos que operación de inversión, $z \mapsto z^{-1}$, es continua en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Por lo tanto, es continua su restricción a $\mathbb{T}$. $\square$

Observación 10. La topología en $\mathbb{R}_{2\pi}$ se define como la topología del cociente. Notemos que si $a \in \mathbb{R}$, entonces los conjuntos

$$(a-\delta, a+\delta) + 2\pi\mathbb{Z},$$

donde $\delta > 0$, forman una base de vecindades abiertas del punto a.

Observación 11. Se puede demostrar que $\mathbb{R}_{2\pi}$ es un grupo topológico.

Observación 12. Definimos en $[0,2\pi)$ una topología no canónica de tal manera que para cada a en $(0,2\pi)$, los conjuntos

$$(a-\delta, a+\delta),$$

con $0 < de < \min(a, 2\pi - a)$, forman una base de vecindades abiertas del punto a. Para $a = 0$, una base de vecindades está formada por los conjuntos

$$[0,\delta) \cup (2\pi - \delta, 2\pi),$$

donde $0 < \delta < \pi$.

Observación 13. Se puede demostrar que $[0,2\pi)$ con la operación $\oplus$ y con esta topología es un grupo topológico.

Observación 14. Se puede demostrar que φ, ψ, η son homeomorfismos.

Medida

Definición 15. Denotemos por $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ y $\mu_{\mathbb{R}}$ a la σ-álgebra de Lebesgue y a la medida de Lebesgue. La medida en $[0, 2\pi)$ se define como la medida de Lebesgue normalizada. Para cada $A \subseteq [0, 2\pi)$, tal que $A \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$,

$$\mu_1(A) \coloneqq \frac{\mu_{\mathbb{R}}(A)}{2\pi}.$$

Definición 16. La medida canónica en $\mathbb{T}$ se puede definir como la imagen de la medida μ_1 bajo η:

$$\mu_{\mathbb{T}}(B) \coloneqq \mu_1(\eta^{-1}[B]).$$

De manera más explícita,

$$\mu_{\mathbb{T}}(B) = \frac{\mu_{\mathbb{R}}\left(\left\{x \in [0, 2\pi):\ \ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} \in B\right\}\right)}{2\pi}.$$

Definición 17. La medida canónica en $\mathbb{R}_{2\pi}$ se puede definir como la imagen de la medida μ_1 bajo ψ:

$$\mu_{\mathbb{R}_{2\pi}}(C) \coloneqq \mu_1(\varphi^{-1}[C]).$$

En otras palabras,

$$\mu_{\mathbb{R}_{2\pi}}(C) = \frac{\mu_{\mathbb{R}}\left(\left\{x \in [0, 2\pi):\ \ x + 2\pi\mathbb{Z} \in C\right\}\right)}{2\pi}.$$

Observación 18. Se puede demostrar que μ_1 es invariante bajo las traslaciones:

$$\mu_1(x + A) = \mu_1(A).$$

Más aún, μ_1 es la única medida en $[0, 2\pi)$ (definida en todos los subconjuntos Lebesgue-medibles) con esta propiedad.

Observación 19. De manera similar, $\mu_{\mathbb{T}}$ es la única medida en $\mathbb{T}$ invariante bajo las rotaciones, y $\mu_{\mathbb{R}_{2\pi}}$ es la única medida en $\mathbb{R}_{2\pi}$ invariante bajo las traslaciones.

Ventajas de cada uno de estos grupos

Observación 20. Mencionemos algunas ventajas de varias formas equivalentes de $\mathbb{T}$.

- En $\mathbb{T}$ es simple la operación del grupo (es una restricción de la multiplicación de números complejos) y la topología.
- En $\mathbb{R}_{2\pi}$, la operación del grupo y la topología se definen por medio de procedimientos muy usuales en álgebra y topología.
- En $[0, 2\pi)$ se define fácilmente la medida. La operación del grupo también es accesible y puede ser cómoda para programar.