

Cotas superiores e inferiores

Objetivos. Repasar las nociones de las cotas superiores e inferiores.

Requisitos. Eje real extendido, propiedades de las desigualdades.

Cotas superiores e inferiores, máximos y mínimos

1. Definición (cota superior de un conjunto). Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Un elemento $b \in \overline{\mathbb{R}}$ se llama *cota superior* de A si $a \leq b$ para todo $a \in A$.

2. Notación (el conjunto de todas las cotas superiores de un conjunto). Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Denotemos por $CS(A)$ al conjunto de todas las cotas superiores de A :

$$CS(A) := \{b \in \overline{\mathbb{R}} : \forall a \in A \quad a \leq b\}.$$

3. Ejemplo. 7 es una cota superior del conjunto $[-3, 4]$, esto es, $7 \in CS([-3, 4])$.

4. $+\infty$ como una cota superior universal. Para cualquier conjunto $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, el elemento $+\infty$ es una cota superior de A :

$$\forall A \subseteq \overline{\mathbb{R}} \quad +\infty \in CS(A).$$

5. Ejercicio. Escriba la definición de una cota inferior de un conjunto. Para el conjunto de las cotas inferiores de un conjunto A usamos la notación $CI(A)$.

6. Ejemplo. $CS([-7, 4]) = [4, +\infty)$, $CI([-7, 4]) = [-\infty, -7]$.

7. Ejercicio. Encuentre $CS(A)$ y $CI(A)$ para cada uno de los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A = (2, 5), \quad A = (2, 5], \quad A = [2, 5], \quad A = [-3, +\infty), \quad A = [-1, 7) \cup [9, 11], \\ A = \mathbb{R}, \quad A = \overline{\mathbb{R}}, \quad A = \{-\infty\}, \quad A = (-\infty, 3] \cup (4, +\infty). \end{aligned}$$

8. Muestre que cualquier $b \in \overline{\mathbb{R}}$ es una cota superior de \emptyset y al mismo tiempo es una cota inferior de \emptyset . En otras palabras, $CS(\emptyset) = CI(\emptyset) = \overline{\mathbb{R}}$.

9. Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Escriba de manera formal (con cuantificadores) la siguiente afirmación: b no es cota superior de A .

10. Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Escriba de manera formal (con cuantificadores) la siguiente afirmación: b no es cota inferior de A .

11. Monotonía del conjunto de las cotas superiores. Sean $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ tales que $A \subseteq B$. Demuestre que $CS(B) \subseteq CS(A)$.

Conjuntos acotados superiormente o inferiormente

12. Definición (conjunto acotado superiormente). Un conjunto $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ se llama *acotado superiormente* si existe una cota superior finita de A :

$$A \text{ es acotado superiormente} \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \text{CS}(A) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset.$$

13. Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Muestre que A no es acotado superiormente si, y sólo si, $\text{CS}(A) = \{+\infty\}$.

14. Ejercicio. Escriba la definición de conjunto acotado inferiormente.

15. Ejercicio. Demuestre que el conjunto \mathbb{Z} no está acotado superiormente.

16. Ejercicio. Demuestre que el conjunto \mathbb{Q} no es acotado superiormente.

Elemento máximo y elemento mínimo de un conjunto

17. Definición (elemento máximo de un conjunto). Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Un elemento b se llama *elemento máximo* de A si $b \in A$ y $a \leq b$ para todo $a \in A$.

18. Relación entre elemento máximo y cota superior. b es un elemento máximo de A si y sólo si $b \in A$ y b es una cota superior de A :

$$b \text{ es un elemento máximo de } A \quad \iff \quad b \in A \cap \text{CS}(A).$$

19. Unicidad del elemento máximo. Si $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y existe un elemento máximo de A , entonces este es único.

20. Ejercicio. Escriba la definición del elemento mínimo.

21. Ejemplos. Para cada uno de los siguientes conjuntos, describa sus cotas superiores, cotas inferiores, máximos y mínimos:

1. $(-7, 3]$.

2. $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

3. $(3, 5) \cup [6, 8]$.