Operadores unitarios
(un tema de la unidad “Operadores en espacios de Hilbert”)

Egor Maximenko
https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

26 de julio de 2022

En este tema suponemos que H es un espacio de Hilbert complejo.

En este tema suponemos que H es un espacio de Hilbert complejo.

Objetivo:

- estudiar algunas descripciones equivalentes de los operadores unitarios $H \to H$;
- estudiar algunas propiedades básicas de los operadores unitarios $H \to H$.

En este tema suponemos que H es un espacio de Hilbert complejo.

Objetivo:

- estudiar algunas descripciones equivalentes de los operadores unitarios $H \to H$;
- estudiar algunas propiedades básicas de los operadores unitarios $H \to H$.

Prerrequisitos:

- el operador adjunto en espacios de Hilbert;
- isometrías lineales entre espacios de Hilbert;
- los elementos del espectro se acotan por la norma del operador.

Plan

Repaso: criterio de isometrías lineales en un espacio de Hilbert

Proposición

Sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $S^* S = I$.

(b) S preserva el producto interno:
$$\forall x, y \in H \qquad \langle Sx, Sy \rangle = \langle x, y \rangle.$$

(c) S preserva la norma:
$$\forall u \in H \qquad \|Su\| = \|u\|.$$

(d) S preserva la distancia:
$$\forall x, y \in H \qquad d(Sx, Sy) = d(x, y).$$

Plan

Definición

Sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Se dice que S es unitario, si

$$S^* S = I \qquad \wedge \qquad S\, S^* = I.$$

Definición

Sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Se dice que S es unitario, si

$$S^* S = I \qquad \wedge \qquad S\, S^* = I.$$

Obviamente, cada operador unitario es normal.

Descripciones equivalentes de los operadores unitarios

Proposición

Sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) S es unitario;

(b) S es un isomorfismo isométrico.

(c) S es isométrico y suprayectivo.

Descripciones equivalentes de los operadores unitarios

Proposición

Sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) S es unitario;

(b) S es un isomorfismo isométrico.

(c) S es isométrico y suprayectivo.

Ejercicio: explicar que (b) implica (c).

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que S es unitario.

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que S es unitario.

La igualdad $S^*S = I$ significa que S es isométrico.

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que S es unitario.

La igualdad $S^*S = I$ significa que S es isométrico.

Además, las igualdades $S^*S = I$ y $S\,S^* = I$ significan que S es invertible.

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que S es unitario.

La igualdad $S^*S = I$ significa que S es isométrico.

Además, las igualdades $S^*S = I$ y $S\,S^* = I$ significan que S es invertible.

Por lo tanto, S es un isomorfismo.

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que S es unitario.

La igualdad $S^*S = I$ significa que S es isométrico.

Además, las igualdades $S^*S = I$ y $S\,S^* = I$ significan que S es invertible.

Por lo tanto, S es un isomorfismo.

Además,

$$S^{-1} = S^*.$$

Demostración, (c)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que S es isométrico y suprayectivo.

Como S es isométrico, tenemos que $S^*S = I$ y S es inyectivo.

Demostración, (c)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que S es isométrico y suprayectivo.

Como S es isométrico, tenemos que $S^*S = I$ y S es inyectivo.

Por lo tanto, S es biyectivo.

Demostración, (c)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que S es isométrico y suprayectivo.

Como S es isométrico, tenemos que $S^*S = I$ y S es inyectivo.

Por lo tanto, S es biyectivo.

Podemos concluir que S es invertible, y su inverso coincide con su inverso por la izquierda S^*.

Demostración, (c)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que S es isométrico y suprayectivo.

Como S es isométrico, tenemos que $S^*S = I$ y S es inyectivo.

Por lo tanto, S es biyectivo.

Podemos concluir que S es invertible, y su inverso coincide con su inverso por la izquierda S^*.

Demostremos de manera más directa que $S\,S^* = I$.

Demostración, (c)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que S es isométrico y suprayectivo.

Como S es isométrico, tenemos que $S^*S = I$ y S es inyectivo.

Por lo tanto, S es biyectivo.

Podemos concluir que S es invertible, y su inverso coincide con su inverso por la izquierda S^*.

Demostremos de manera más directa que $S\,S^* = I$.

Sea $x \in H$.

Demostración, (c)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que S es isométrico y suprayectivo.

Como S es isométrico, tenemos que $S^*S = I$ y S es inyectivo.

Por lo tanto, S es biyectivo.

Podemos concluir que S es invertible, y su inverso coincide con su inverso por la izquierda S^*.

Demostremos de manera más directa que $S\,S^* = I$.

Sea $x \in H$. Como S es biyectivo, encontramos un v en H tal que $x = Sv$.

Demostración, (c)⇒(a)

Supongamos que S es isométrico y suprayectivo.

Como S es isométrico, tenemos que $S^*S = I$ y S es inyectivo.

Por lo tanto, S es biyectivo.

Podemos concluir que S es invertible, y su inverso coincide con su inverso por la izquierda S^*.

Demostremos de manera más directa que $S\,S^* = I$.

Sea $x \in H$. Como S es biyectivo, encontramos un v en H tal que $x = Sv$.

Aplicamos $S\,S^*$ a ambos lados de la igualdad:

$$S\,S^*x$$

Demostración, (c)⇒(a)

Supongamos que S es isométrico y suprayectivo.

Como S es isométrico, tenemos que $S^* S = I$ y S es inyectivo.

Por lo tanto, S es biyectivo.

Podemos concluir que S es invertible, y su inverso coincide con su inverso por la izquierda S^*.

Demostremos de manera más directa que $S\,S^* = I$.

Sea $x \in H$. Como S es biyectivo, encontramos un v en H tal que $x = Sv$.

Aplicamos $S\,S^*$ a ambos lados de la igualdad:

$$S\,S^* x =$$

Demostración, (c)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que S es isométrico y suprayectivo.

Como S es isométrico, tenemos que $S^*S = I$ y S es inyectivo.

Por lo tanto, S es biyectivo.

Podemos concluir que S es invertible, y su inverso coincide con su inverso por la izquierda S^*.

Demostremos de manera más directa que $S\,S^* = I$.

Sea $x \in H$. Como S es biyectivo, encontramos un v en H tal que $x = Sv$.

Aplicamos $S\,S^*$ a ambos lados de la igualdad:

$$S\,S^*x = S\,S^*(Sv)$$

Demostración, (c)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que S es isométrico y suprayectivo.

Como S es isométrico, tenemos que $S^*S = I$ y S es inyectivo.

Por lo tanto, S es biyectivo.

Podemos concluir que S es invertible, y su inverso coincide con su inverso por la izquierda S^*.

Demostremos de manera más directa que $S\,S^* = I$.

Sea $x \in H$. Como S es biyectivo, encontramos un v en H tal que $x = Sv$.

Aplicamos $S\,S^*$ a ambos lados de la igualdad:

$$S\,S^*x = S\,S^*(Sv) =$$

Demostración, (c)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que S es isométrico y suprayectivo.

Como S es isométrico, tenemos que $S^*S = I$ y S es inyectivo.

Por lo tanto, S es biyectivo.

Podemos concluir que S es invertible, y su inverso coincide con su inverso por la izquierda S^*.

Demostremos de manera más directa que $S\,S^* = I$.

Sea $x \in H$. Como S es biyectivo, encontramos un v en H tal que $x = Sv$.

Aplicamos $S\,S^*$ a ambos lados de la igualdad:

$$S\,S^*x = S\,S^*(Sv) = S\,(S^*S)v$$

Demostración, (c)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que S es isométrico y suprayectivo.

Como S es isométrico, tenemos que $S^*S = I$ y S es inyectivo.

Por lo tanto, S es biyectivo.

Podemos concluir que S es invertible, y su inverso coincide con su inverso por la izquierda S^*.

Demostremos de manera más directa que $S\,S^* = I$.

Sea $x \in H$. Como S es biyectivo, encontramos un v en H tal que $x = Sv$.

Aplicamos $S\,S^*$ a ambos lados de la igualdad:

$$S\,S^*x = S\,S^*(Sv) = S\,(S^*S)v =$$

Demostración, (c)⇒(a)

Supongamos que S es isométrico y suprayectivo.

Como S es isométrico, tenemos que $S^*S = I$ y S es inyectivo.

Por lo tanto, S es biyectivo.

Podemos concluir que S es invertible, y su inverso coincide con su inverso por la izquierda S^*.

Demostremos de manera más directa que $S\,S^* = I$.

Sea $x \in H$. Como S es biyectivo, encontramos un v en H tal que $x = Sv$.

Aplicamos $S\,S^*$ a ambos lados de la igualdad:

$$S\,S^*x = S\,S^*(Sv) = S\,(S^*S)v = S\,I\,v$$

Demostración, (c)⇒(a)

Supongamos que S es isométrico y suprayectivo.

Como S es isométrico, tenemos que $S^*S = I$ y S es inyectivo.

Por lo tanto, S es biyectivo.

Podemos concluir que S es invertible, y su inverso coincide con su inverso por la izquierda S^*.

Demostremos de manera más directa que $S\,S^* = I$.

Sea $x \in H$. Como S es biyectivo, encontramos un v en H tal que $x = Sv$.

Aplicamos $S\,S^*$ a ambos lados de la igualdad:

$$S\,S^* x = S\,S^*(Sv) = S\,(S^*S)v = S\,I\,v =$$

Demostración, (c)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que S es isométrico y suprayectivo.

Como S es isométrico, tenemos que $S^*S = I$ y S es inyectivo.

Por lo tanto, S es biyectivo.

Podemos concluir que S es invertible, y su inverso coincide con su inverso por la izquierda S^*.

Demostremos de manera más directa que $S\,S^* = I$.

Sea $x \in H$. Como S es biyectivo, encontramos un v en H tal que $x = Sv$.

Aplicamos $S\,S^*$ a ambos lados de la igualdad:

$$S\,S^*x = S\,S^*(Sv) = S\,(S^*S)v = S\,I\,v = S\,v$$

Demostración, (c)⇒(a)

Supongamos que S es isométrico y suprayectivo.

Como S es isométrico, tenemos que $S^*S = I$ y S es inyectivo.

Por lo tanto, S es biyectivo.

Podemos concluir que S es invertible, y su inverso coincide con su inverso por la izquierda S^*.

Demostremos de manera más directa que $S\,S^* = I$.

Sea $x \in H$. Como S es biyectivo, encontramos un v en H tal que $x = Sv$.

Aplicamos $S\,S^*$ a ambos lados de la igualdad:

$$S\,S^*x = S\,S^*(Sv) = S\,(S^*S)v = S\,I\,v = S\,v =$$

Demostración, (c)⇒(a)

Supongamos que S es isométrico y suprayectivo.

Como S es isométrico, tenemos que $S^*S = I$ y S es inyectivo.

Por lo tanto, S es biyectivo.

Podemos concluir que S es invertible, y su inverso coincide con su inverso por la izquierda S^*.

Demostremos de manera más directa que $S\,S^* = I$.

Sea $x \in H$. Como S es biyectivo, encontramos un v en H tal que $x = Sv$.

Aplicamos $S\,S^*$ a ambos lados de la igualdad:

$$S\,S^*x = S\,S^*(Sv) = S\,(S^*S)v = S\,I\,v = S\,v = x.$$

Plan

Sobre el espectro del operador unitario

Denotamos por $\mathbb{T}$ la circunferencia unitaria en el plano complejo:

$$\mathbb{T} := \{x \in \mathbb{C} : \; |z| = 1\}.$$

Sobre el espectro del operador unitario

Denotamos por $\mathbb{T}$ la circunferencia unitaria en el plano complejo:

$$\mathbb{T} := \{x \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}.$$

Proposición

Sea $U \in \mathcal{B}(H)$ un operador unitario. Entonces

$$\mathrm{sp}(U) \subseteq \mathbb{T}.$$

Demostración

Como U es una isometría lineal, $\|U\| = 1$.

Demostración

Como U es una isometría lineal, $\|U\| = 1$.

Luego para cada λ en $\mathrm{sp}(U)$ se tiene que $|\lambda| \leq 1$.

Demostración

Como U es una isometría lineal, $\|U\| = 1$.

Luego para cada λ en $\mathrm{sp}(U)$ se tiene que $|\lambda| \leq 1$.

Supongamos que $\lambda \in \mathbb{C}$ y $|\lambda| < 1$.

Demostración

Como U es una isometría lineal, $\|U\| = 1$.

Luego para cada λ en $\mathrm{sp}(U)$ se tiene que $|\lambda| \leq 1$.

Supongamos que $\lambda \in \mathbb{C}$ y $|\lambda| < 1$.

Notamos que

$$\lambda I - U$$

Demostración

Como U es una isometría lineal, $\|U\| = 1$.

Luego para cada λ en $\mathrm{sp}(U)$ se tiene que $|\lambda| \leq 1$.

Supongamos que $\lambda \in \mathbb{C}$ y $|\lambda| < 1$.

Notamos que

$$\lambda I - U =$$

Demostración

Como U es una isometría lineal, $\|U\| = 1$.

Luego para cada λ en $\mathrm{sp}(U)$ se tiene que $|\lambda| \leq 1$.

Supongamos que $\lambda \in \mathbb{C}$ y $|\lambda| < 1$.

Notamos que

$$\lambda I - U = U(\lambda U^* - I)$$

Demostración

Como U es una isometría lineal, $\|U\| = 1$.

Luego para cada λ en $\mathrm{sp}(U)$ se tiene que $|\lambda| \leq 1$.

Supongamos que $\lambda \in \mathbb{C}$ y $|\lambda| < 1$.

Notamos que

$$\lambda I - U = U(\lambda U^* - I) =$$

Demostración

Como U es una isometría lineal, $\|U\| = 1$.

Luego para cada λ en $\mathrm{sp}(U)$ se tiene que $|\lambda| \leq 1$.

Supongamos que $\lambda \in \mathbb{C}$ y $|\lambda| < 1$.

Notamos que

$$\lambda I - U = U(\lambda U^* - I) = -U(I - \lambda U^*).$$

Demostración

Como U es una isometría lineal, $\|U\| = 1$.

Luego para cada λ en $\mathrm{sp}(U)$ se tiene que $|\lambda| \leq 1$.

Supongamos que $\lambda \in \mathbb{C}$ y $|\lambda| < 1$.

Notamos que
$$\lambda I - U = U(\lambda U^* - I) = -U(I - \lambda U^*).$$

Como $\|\lambda U^*\| < 1$, el operador $I - \lambda U^*$ es invertible.

Demostración

Como U es una isometría lineal, $\|U\| = 1$.

Luego para cada λ en $\mathrm{sp}(U)$ se tiene que $|\lambda| \leq 1$.

Supongamos que $\lambda \in \mathbb{C}$ y $|\lambda| < 1$.

Notamos que
$$\lambda I - U = U(\lambda U^* - I) = -U(I - \lambda U^*).$$

Como $\|\lambda U^*\| < 1$, el operador $I - \lambda U^*$ es invertible.

Luego $\lambda I - U$ es invertible y $\lambda \notin \mathrm{sp}(U)$.

Ejemplo

Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión con valores en $\mathbb{T}$ tal que

$$\operatorname{clos}(A) = \mathbb{T}, \qquad \text{donde} \qquad A \coloneqq \{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Ejemplo

Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión con valores en $\mathbb{T}$ tal que

$$\operatorname{clos}(A) = \mathbb{T}, \qquad \text{donde} \qquad A \coloneqq \{a_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}.$$

En el espacio $\ell^2(\mathbb{N})$ consideramos el operador de multiplicación por la sucesión a:

$$M_a\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N}), \qquad M_a(x) \coloneqq a\,x = \bigl(a_k x_k\bigr)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Ejemplo

Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión con valores en $\mathbb{T}$ tal que

$$\operatorname{clos}(A) = \mathbb{T}, \qquad \text{donde} \qquad A \coloneqq \{a_k \colon\ k \in \mathbb{N}\}.$$

En el espacio $\ell^2(\mathbb{N})$ consideramos el operador de multiplicación por la sucesión a:

$$M_a \colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N}), \qquad M_a(x) \coloneqq a\,x = \big(a_k x_k\big)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Se sabe que $\operatorname{sp}(M_a) = \operatorname{clos}\{a_k \colon\ k \in \mathbb{N}\}$.

Ejemplo

Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión con valores en $\mathbb{T}$ tal que

$$\operatorname{clos}(A) = \mathbb{T}, \qquad \text{donde} \qquad A \coloneqq \{a_k \colon\ k \in \mathbb{N}\}.$$

En el espacio $\ell^2(\mathbb{N})$ consideramos el operador de multiplicación por la sucesión a:

$$M_a \colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N}), \qquad M_a(x) \coloneqq a\,x = \big(a_k x_k\big)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Se sabe que $\operatorname{sp}(M_a) = \operatorname{clos}\{a_k \colon\ k \in \mathbb{N}\}$.

En nuestro ejemplo, $\operatorname{sp}(M_a) = \operatorname{clos}(A) = \mathbb{T}$.