Operadores unitarios

Estos apuntes no son completos.

Objetivos. Estudiar propiedades de operadores unitarios en espacios de Hilbert.

Prerrequisitos. Criterio de transformaciones lineales isométricas entre espacios de Hilbert. Operadores normales.

En este tema suponemos que H es un espacio de Hilbert complejo.

1 Proposición (criterio de isometrías en un espacio de Hilbert, repaso)**.** *Sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $S^*S = I$.

(b) S preserva el producto interno:

$$\forall x, y \in H \qquad \langle Sx, Sy \rangle = \langle x, y \rangle.$$

(c) S preserva la norma:

$$\forall u \in H \qquad \|Su\| = \|u\|.$$

(d) S preserva la distancia:

$$\forall x, y \in H \qquad d(Sx, Sy) = d(x, y).$$

2 Definición. Sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Se dice que S es *unitario* si $S^*S = I$ y $SS^* = I$.

Obviamente, cada operador unitario es normal.

3 Proposición. *Sea $S \in \mathcal{B}(H)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) S es unitario;

(b) S es isométrico y suprayectivo.

Demostración. (a)⇒(b). Supongamos que S es unitario. Entonces la condición $S^*S = I$ significa que S es isométrico, y la condición $SS^* = I$ implica que S es invertible por la derecha, y por eso es suprayectivo. De manera más explícita, para cada x en H tenemos

$$x = Ix = (SS^*)x = S(S^*x) \in S[H].$$

(b)⇒(a). Supongamos que S es isométrico y suprayectivo. Como S es isométrico, tenemos que S es inyectivo y $S^*S = I$. Como S es inyectivo y sobre, concluimos que la función S es invertible. Luego cualquier función inversa por la izquierda coincide con la inversa bilateral, y $SS^* = I$. □

Denotamos por $\mathbb{T}$ la circunferencia unitaria en el plano complejo:

$$\mathbb{T} \coloneqq \big\{x \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 1\big\}.$$

4 Proposición. *Sea* $U \in \mathcal{B}(H)$ *un operador unitario. Entonces* $\operatorname{Sp}(U) \subseteq \mathbb{T}$.

Demostración. Como U es una isometría lineal, $\|U\| = 1$. Luego para cada λ en $\operatorname{Sp}(U)$ se tiene que $|\lambda| \le 1$.

Supongamos que $\lambda \in \mathbb{C}$ y $|\lambda| < 1$. Notamos que

$$\lambda I - U = U(\lambda U^* - I) = -U(I - \lambda U^*).$$

Como $\|\lambda U^*\| < 1$, el operador $I - \lambda U^*$ es invertible. Luego $\lambda I - U$ es invertible y $\lambda \notin \operatorname{Sp}(U)$. □