Funciones uniformemente continuas

Objetivos. Estudiar el concepto de funciones uniformemente continuas.

Aplicaciones. Extensión continua de funciones uniformemente continuas, completación de espacios métricos.

Prerrequisitos. Espacios métricos, funciones continuas.

En este tema suponemos que (X, d_X) y (Y, d_Y) son espacios métricos. Casi todos los conceptos se extienden al caso si (X, d_X) y (Y, d_Y) son espacios pseudométricos.

1 Definición (función uniformemente continua)**.** Sea $f\colon X \to Y$. Se dice que f es *uniformemente continua* si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualesquiera a y b en X, si $d_X(a, b) < \delta$, entonces $d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon$. Denotemos por $C_u(X, Y)$ al conjunto de todas las funciones uniformemente continuas de X a Y.

2 Ejercicio. Demuestre que $C_u(X, Y) \subseteq C(X, Y)$.

3 Definición (el módulo de continuidad de una función)**.** Sea $f\colon X \to Y$. Definimos $\omega_f\colon (0, +\infty) \to [0, +\infty]$ mediante la siguiente regla:

$$\omega_f(\eta) \coloneqq \sup\{d_Y(f(a), f(b))\colon\ a, b \in X,\ d_X(a, b) \le \eta\}.$$

El término “módulo de continuidad” es el más común para hablar de este concepto, aunque una frase más precisa sería “el medidor de continuidad uniforme”.

La siguiente proposición muestra una aplicación usual y simple del módulo de continuidad.

4 Proposición. *Sea $f\colon X \to Y$ y sean $x, y \in X$. Entonces*

$$d_Y(f(x), f(y)) \le \omega_f(d_X(x, y)).$$

Demostración. Sea $\eta = d_X(x, y)$. Entonces $(x, y) \in \{(a, b) \in X^2\colon\ d_X(a, b) \le \eta\}$ y por eso

$$d_Y(f(x), f(y)) \in \{d_Y(f(a), f(b))\colon\ a, b \in X,\ d_X(a, b) \le \eta\}.$$

Finalmente, recordamos que cualquier elemento de un subconjunto de $[0, +\infty]$ es menor o igual que el supremo de este subconjunto. □

5 Proposición (el módulo de continuidad es una función creciente)**.** *Sea* $f\colon X \to Y$ *y sean* $\eta_1, \eta_2 > 0$ *tales que* $\eta_1 < \eta_2$. *Entonces* $\omega_f(\eta_1) \le \omega_f(\eta_2)$.

Demostración. Si $d_X(a,b) \le \eta_1$, entonces $d_X(a,b) \le \eta_2$. Por eso

$$\{d_Y(f(a), f(b))\colon a, b \in X,\ d_X(a,b) \le \eta_1\} \subseteq \{d_Y(f(a), f(b))\colon a, b \in X,\ d_X(a,b) \le \eta_1\}.$$

Luego el supremo del primer conjunto es menor o igual que el supremo del segundo. □

6 Proposición (criterio de la continuidad uniforme en términos del módulo de continuidad)**.** *Sea* $f\colon X \to Y$. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) f *es uniformemente continua;*

(b) para cada $\varepsilon > 0$ *existe* $\eta > 0$ *tal que* $\omega_f(\eta) \le \varepsilon$*;*

(c) $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega_f(\delta) = 0$.

Demostración. (a)⇒(b). Supongamos que $f \in C_u(X,Y)$. Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $\delta > 0$ tal que para cualesquiera a, b en X con $d_X(a,b) < \delta$ se cumple la desigualdad $d_Y(f(a), f(b)) \le \varepsilon$. Pongamos $\eta \coloneqq \delta/2$. Notamos que si $a, b \in X$ y $d_X(a,b) \le \eta$, entonces $d_X(a,b) < \delta/2$ y por eso $d_Y(f(a), f(b)) \le \varepsilon$. Luego $\omega_f(\eta) \le \varepsilon$.

(b)⇒(c). Supongamos que se cumple (b). Mostremos que $\lim_{\delta \to 0} \omega_f(\delta) = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $\eta > 0$ tal que $\omega_f(\eta) \le \varepsilon/2$. Entonces para cada δ en $(0, \eta)$, por la Proposición 5 tenemos

$$\omega_f(\delta) \le \omega_f(\eta) \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

(c)⇒(a). Supongamos (c) y mostremos (a). Sea $\varepsilon > 0$. Encontramos $\delta > 0$ tal que para cada η en $(0, \delta)$ se cumple $\omega_f(\eta) < \varepsilon$. Si $a, b \in X$ y $d_X(a,b) < \delta$, entonces por la Proposición 4

$$d_Y(f(a), f(b)) \le \omega_f(d_X(a,b)) < \varepsilon.$$ □

7 Observación. Notemos que la definición de la continuidad uniforme utiliza 4 cuantificadores, a saber, los cuantificadores sobre las variables $\varepsilon, \delta, a, b$. La condicion (b) en la Proposición 6 utiliza solamente 2 cuantificadores. Esta observación muestra la utilidad de ω_f.

8 Ejercicio. Sea $f\colon [-5, 5] \to \mathbb{R}$ la función definida mediante la regla $f(x) = x^2$. Calcule ω_f y determine si f es uniformemente continua.

9 Ejercicio. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida mediante la regla $f(x) = x^2$. Calcule ω_f y determine si f es uniformemente continua.

10 Ejercicio. Sea $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida mediante la regla $f(x) = 1/x$. Calcule ω_f y determine si f es uniformemente continua.

11 Proposición (las funciones uniformemente continuas convierten sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy)**.** *Sea $f \in C_u(X, Y)$ y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Entonces $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y.*

12 Tarea. Determine si es cierta la afirmación recíproca a la Proposición 11. En otras palabras, supongamos que para cualquier sucesión de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X, la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en Y. Determine si la función f debe ser uniformemente continua.