Vecindades uniformes de conjuntos en espacios métricos (un tema de la unidad “Espacios métricos”)

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

8 de octubre de 2022

Plan

Objetivo: estudiar propiedades elementales del conjunto

$$V(A, r) := \Big\{x \in X\colon \ \inf_{a \in A} d(a, x) < r\Big\},$$

donde A es un subconjunto del espacio métrico X y $r > 0$.

Prerrequisitos

- Bolas en espacios métricos.
- El ínfimo de una función.
- La distancia de un punto a un conjunto.
- La unión de una familia de conjuntos.

Repaso: la distancia entre un punto y un conjunto en un espacio métrico

En este tema suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

Repaso: la distancia entre un punto y un conjunto en un espacio métrico

En este tema suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

Definición

Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subseteq X$. Definimos $D_A \colon X \to [0, +\infty]$,

$$D_A(x) := \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Repaso: la distancia entre un punto y un conjunto en un espacio métrico

En este tema suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

Definición

Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subseteq X$. Definimos $D_A \colon X \to [0, +\infty]$,

$$D_A(x) := \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Si $A \neq \emptyset$, entonces $D_A(x) < +\infty$ para cada x en A.

Repaso: la función D_A es Lipschitz continua con coeficiente 1

Proposición

Sea $A \subseteq X$ tal que $A \neq \emptyset$. Entonces cada x, y en X,

$$|D_A(x) - D_A(y)| \leq d(x, y).$$

Repaso: una regla para trabajar con desigualdades de la forma $D_A(x) < \eta$

Ejercicio. Sean $A \subseteq X$, $x \in X$, $\eta > 0$. Demostrar que

$$D_A(x) < \eta \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists a \in A \qquad d(x, a) < \eta.$$

Repaso: una regla para trabajar con desigualdades de la forma $D_A(x) < \eta$

Ejercicio. Sean $A \subseteq X$, $x \in X$, $\eta > 0$. Demostrar que

$$D_A(x) < \eta \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists a \in A \qquad d(x, a) < \eta.$$

Sugerencia: trabajar con la definición del ínfimo.

Descripción de la cerradura de A en términos de D_A

Ejercicio. Sean $A \subseteq X$, $x \in X$. Demostrar que

$$D_A(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \mathrm{cl}(A).$$

Descripción de la cerradura de A en términos de D_A

Ejercicio. Sean $A \subseteq X$, $x \in X$. Demostrar que

$$D_A(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \mathrm{cl}(A).$$

Sugerencia: usar el resultado del ejercicio anterior
y el criterio de puntos de adherencia en términos de bolas.

Plan

Vecindades uniformes de un conjunto

En este tema suponemos que (X, d) es un espacio métrico,

Vecindades uniformes de un conjunto

En este tema suponemos que (X, d) es un espacio métrico,

Definición

Sean $A \subseteq X$, $r > 0$. Pongamos

$$V(A, r) \;:=\; \Big\{x \in X \colon\; D_A(x) < r\Big\}.$$

Vecindades uniformes de un conjunto

En este tema suponemos que (X, d) es un espacio métrico,

Definición

Sean $A \subseteq X$, $r > 0$. Pongamos

$$V(A, r) \; := \; \Big\{ x \in X \colon \; D_A(x) < r \Big\}.$$

Observación. Si $A = \emptyset$, entonces para cada $r > 0$ tenemos

$$V(A, r)$$

Vecindades uniformes de un conjunto

En este tema suponemos que (X, d) es un espacio métrico,

Definición

Sean $A \subseteq X$, $r > 0$. Pongamos

$$V(A, r) \ := \ \Big\{x \in X: \ D_A(x) < r\Big\}.$$

Observación. Si $A = \emptyset$, entonces para cada $r > 0$ tenemos

$$V(A, r) =$$

Vecindades uniformes de un conjunto

En este tema suponemos que (X, d) es un espacio métrico,

Definición

Sean $A \subseteq X$, $r > 0$. Pongamos

$$V(A, r) \ := \ \Big\{x \in X : \ D_A(x) < r\Big\}.$$

Observación. Si $A = \emptyset$, entonces para cada $r > 0$ tenemos

$$V(A, r) = \emptyset.$$

Vecindades uniformes de un conjunto

En este tema suponemos que (X, d) es un espacio métrico,

Definición

Sean $A \subseteq X$, $r > 0$. Pongamos

$$V(A, r) \;:=\; \Big\{x \in X\colon\; D_A(x) < r\Big\}.$$

Observación. Si $A = \emptyset$, entonces para cada $r > 0$ tenemos

$$V(A, r) = \emptyset.$$

En algunas demostraciones vamos a omitir la consideración de este caso trivial.

Descripciones equivalentes del conjunto $V(A, r)$

Proposición

Sean $A \subseteq X$, $r > 0$. Entonces

$$V(A,r) \;=\; \Big\{x \in X : \quad \exists a \in A \quad d(x,a) < r\Big\} \;=\; \bigcup_{a \in A} B(a,r).$$

Descripciones equivalentes del conjunto $V(A, r)$, demostración

Sea $x \in X$.

Descripciones equivalentes del conjunto $V(A, r)$, demostración

Sea $x \in X$. Entonces

Descripciones equivalentes del conjunto $V(A, r)$, demostración

Sea $x \in X$. Entonces

$$D_A(x) < r$$

Descripciones equivalentes del conjunto $V(A, r)$, demostración

Sea $x \in X$. Entonces

$$D_A(x) < r \qquad \Longleftrightarrow$$

Descripciones equivalentes del conjunto $V(A, r)$, demostración

Sea $x \in X$. Entonces

$$D_A(x) < r \qquad \iff \qquad \inf_{a \in A} d(x, a) < r \qquad \iff$$

Descripciones equivalentes del conjunto $V(A, r)$, demostración

Sea $x \in X$. Entonces

$$D_A(x) < r \qquad \Longleftrightarrow \qquad \inf_{a \in A} d(x, a) < r \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists a \in A \quad d(x, a) < r$$

Descripciones equivalentes del conjunto $V(A, r)$, demostración

Sea $x \in X$. Entonces

$$D_A(x) < r \quad \Longleftrightarrow \quad \inf_{a \in A} d(x, a) < r \quad \Longleftrightarrow \quad \exists a \in A \quad d(x, a) < r$$

$$\Longleftrightarrow$$

Descripciones equivalentes del conjunto $V(A, r)$, demostración

Sea $x \in X$. Entonces

$$
\begin{aligned}
D_A(x) < r \quad &\iff \quad \inf_{a \in A} d(x, a) < r \quad \iff \quad \exists a \in A \quad d(x, a) < r \\
&\iff \quad \exists a \in A \quad x \in B(a, r)
\end{aligned}
$$

Descripciones equivalentes del conjunto $V(A, r)$, demostración

Sea $x \in X$. Entonces

$$D_A(x) < r \quad \Longleftrightarrow \quad \inf_{a \in A} d(x, a) < r \quad \Longleftrightarrow \quad \exists a \in A \quad d(x, a) < r$$

$$\Longleftrightarrow \quad \exists a \in A \quad x \in B(a, r) \quad \Longleftrightarrow$$

Descripciones equivalentes del conjunto $V(A, r)$, demostración

Sea $x \in X$. Entonces

$$
\begin{aligned}
D_A(x) < r \quad &\iff \quad \inf_{a \in A} d(x, a) < r \quad \iff \quad \exists a \in A \quad d(x, a) < r \\
&\iff \quad \exists a \in A \quad x \in B(a, r) \quad \iff \quad x \in \bigcup_{a \in A} B(a, r).
\end{aligned}
$$

Descripciones equivalentes del conjunto $V(A, r)$, demostración

Sea $x \in X$. Entonces

$$
\begin{aligned}
D_A(x) < r \quad &\iff \quad \inf_{a \in A} d(x, a) < r \quad \iff \quad \exists a \in A \quad d(x, a) < r \\
&\iff \quad \exists a \in A \quad x \in B(a, r) \quad \iff \quad x \in \bigcup_{a \in A} B(a, r).
\end{aligned}
$$

Hemos aplicado una propiedad del ínfimo,

Descripciones equivalentes del conjunto $V(A, r)$, demostración

Sea $x \in X$. Entonces

$$
\begin{aligned}
D_A(x) < r \quad &\iff \quad \inf_{a \in A} d(x, a) < r \quad \iff \quad \exists a \in A \quad d(x, a) < r \\
&\iff \quad \exists a \in A \quad x \in B(a, r) \quad \iff \quad x \in \bigcup_{a \in A} B(a, r).
\end{aligned}
$$

Hemos aplicado una propiedad del ínfimo, la definición de la bola abierta

Descripciones equivalentes del conjunto $V(A, r)$, demostración

Sea $x \in X$. Entonces

$$
\begin{aligned}
D_A(x) < r \quad &\iff \quad \inf_{a \in A} d(x, a) < r \quad \iff \quad \exists a \in A \quad d(x, a) < r \\
&\iff \quad \exists a \in A \quad x \in B(a, r) \quad \iff \quad x \in \bigcup_{a \in A} B(a, r).
\end{aligned}
$$

Hemos aplicado una propiedad del ínfimo, la definición de la bola abierta
y la definición de la unión de una familia de conjuntos.

Plan

Las vecindades uniformes del conjunto contienen al conjunto

Proposición

Sean $A \subseteq X$, $r > 0$. Entonces $A \subseteq V(A, r)$.

Las vecindades uniformes del conjunto contienen al conjunto

Proposición

Sean $A \subseteq X$, $r > 0$. Entonces $A \subseteq V(A, r)$.

Primera demostración.

Las vecindades uniformes del conjunto contienen al conjunto

Proposición

Sean $A \subseteq X$, $r > 0$. Entonces $A \subseteq V(A, r)$.

Primera demostración. Para cada x en A, $\quad d(x, x) = 0 \quad$ y por eso $D_A(x) = 0$.

Las vecindades uniformes del conjunto contienen al conjunto

Proposición

Sean $A \subseteq X$, $r > 0$. Entonces $A \subseteq V(A, r)$.

Primera demostración. Para cada x en A, $\quad d(x, x) = 0 \quad$ y por eso $D_A(x) = 0$.

Segunda demostración.

Las vecindades uniformes del conjunto contienen al conjunto

Proposición

Sean $A \subseteq X$, $r > 0$. Entonces $A \subseteq V(A, r)$.

Primera demostración. Para cada x en A, $\quad d(x, x) = 0 \quad$ y por eso $D_A(x) = 0$.

Segunda demostración. Para cada x en A, $\quad x \in B(x, r) \subseteq V(A, r)$.

Las vecindades uniformes de un conjunto son abiertas

Proposición

Sean $A \subseteq X$, $r > 0$. Entonces $V(A, r) \in \tau_d$.

Las vecindades uniformes de un conjunto son abiertas

Proposición

Sean $A \subseteq X$, $r > 0$. Entonces $V(A, r) \in \tau_d$.

Primera demostración.

$$V(A, r) = \bigcup_{a \in A}$$

Las vecindades uniformes de un conjunto son abiertas

Proposición

Sean $A \subseteq X$, $r > 0$. Entonces $V(A, r) \in \tau_d$.

Primera demostración.

$$V(A, r) = \bigcup_{a \in A} B(a, r).$$

Cada bola $B(a, r)$ es abierta, luego la unión de estas bolas es abierta.

Las vecindades uniformes de un conjunto son abiertas, segunda demostración

Si $A = \emptyset$, entonces $V(A, r) =$

Las vecindades uniformes de un conjunto son abiertas, segunda demostración

Si $A = \emptyset$, entonces $V(A, r) = \emptyset \in \tau_d$.

Las vecindades uniformes de un conjunto son abiertas, segunda demostración

Si $A = \emptyset$, entonces $V(A, r) = \emptyset \in \tau_d$.

Suponemos que $A \neq \emptyset$.

Las vecindades uniformes de un conjunto son abiertas, segunda demostración

Si $A = \emptyset$, entonces $V(A, r) = \emptyset \in \tau_d$.

Suponemos que $A \neq \emptyset$.

Escribimos $V(A, r)$ como la preimagen de cierto conjunto bajo la función D_A:

$$V(A, r) = \{x \in X : \; D_A(x) < r\}$$

Las vecindades uniformes de un conjunto son abiertas, segunda demostración

Si $A = \emptyset$, entonces $V(A, r) = \emptyset \in \tau_d$.

Suponemos que $A \neq \emptyset$.

Escribimos $V(A, r)$ como la preimagen de cierto conjunto bajo la función D_A:

$$V(A, r) = \{x \in X : \; D_A(x) < r\} =$$

Las vecindades uniformes de un conjunto son abiertas, segunda demostración

Si $A = \emptyset$, entonces $V(A, r) = \emptyset \in \tau_d$.

Suponemos que $A \neq \emptyset$.

Escribimos $V(A, r)$ como la preimagen de cierto conjunto bajo la función D_A:

$$V(A, r) = \{x \in X\colon\ D_A(x) < r\} = D_A^{-1}\big[\,(-\infty, r)\,\big].$$

Las vecindades uniformes de un conjunto son abiertas, segunda demostración

Si $A = \emptyset$, entonces $V(A, r) = \emptyset \in \tau_d$.

Suponemos que $A \neq \emptyset$.

Escribimos $V(A, r)$ como la preimagen de cierto conjunto bajo la función D_A:

$$V(A, r) = \{x \in X\colon\ D_A(x) < r\} = D_A^{-1}\big[\,(-\infty, r)\,\big].$$

Como D_A es continua y $(-\infty, r)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$, concluimos que la preimagen es abierta.

Las propiedades monótonas de $V(A, r)$

Proposición

Sean $A \subseteq X$, $r_1, r_2 > 0$, $r_1 < r_2$. Entonces

$$V(A, r_1) \subseteq V(A, r_2).$$

Las propiedades monótonas de $V(A, r)$

Proposición

Sean $A \subseteq X$, $r_1, r_2 > 0$, $r_1 < r_2$. Entonces

$$V(A, r_1) \subseteq V(A, r_2).$$

Proposición

Sean $P \subseteq Q \subseteq X$, $r > 0$. Entonces

$$V(P, r) \subseteq V(Q, r).$$

Las propiedades monótonas de $V(A, r)$

Proposición

Sean $A \subseteq X$, $r_1, r_2 > 0$, $r_1 < r_2$. Entonces

$$V(A, r_1) \subseteq V(A, r_2).$$

Proposición

Sean $P \subseteq Q \subseteq X$, $r > 0$. Entonces

$$V(P, r) \subseteq V(Q, r).$$

Ejercicio: demostrar estas proposiciones.

La cerradura de un conjunto en términos de sus vecindades uniformes

Ejercicio. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$. Demostrar que

$$\mathrm{cl}(A) = \bigcap_{r>0} V(A, r).$$

Las vecindades uniformes de la unión de dos conjuntos

Ejercicio. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $A_1, A_2 \subseteq X$, $r > 0$. Demostrar que

$$V(A_1 \cup A_2, r) = V(A_1, r) \cup V(A_2, r).$$