

Convergencia uniforme (un tema del curso “Análisis real”)

Egor Maximenko

<http://www.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

18 de mayo de 2021

Objetivos:

- repasar la definición de la convergencia uniforme;
- compararla con la convergencia puntual;
- describir la convergencia uniforme en términos de la norma-supremo;
- describir la convergencia uniforme en términos de los conjuntos

$$A(\varepsilon, n) := \left\{ x \in X : |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon \right\}, \quad B(\varepsilon, k) := \bigcup_{n \geq k} A(\varepsilon, n),$$

Prerrequisitos:

- la definición del límite;
- la definición de la convergencia puntual de una sucesión de funciones;
- la norma-supremo;
- los conjuntos $A(\varepsilon, n)$, $B(\varepsilon, k)$ y sus propiedades.

Plan

- 1 Convergencia puntual y uniforme
- 2 La convergencia uniforme y la seminorma-supremo
- 3 Criterio en términos de $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

Plan

- 1 Convergencia puntual y uniforme
- 2 La convergencia uniforme y la seminorma-supremo
- 3 Criterio en términos de $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

Sucesión de funciones

En este tema vamos a considerar una sucesión de funciones complejas $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definidas en un conjunto X :

$$f_n: X \rightarrow \mathbb{C}.$$

En otras palabras, para cada n en \mathbb{N} tenemos $f_n \in \mathbb{C}^X$.

Notación breve: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^X)^{\mathbb{N}}$.

También vamos a suponer que $g: X \rightarrow \mathbb{C}$.

Definiciones de la convergencia puntual y uniforme

Definición de la convergencia puntual (en todo el dominio X):

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} g \quad \Longleftrightarrow \quad \text{def} \quad \forall x \in X \quad f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g(x).$$

Definiciones de la convergencia puntual y uniforme

Definición de la convergencia puntual (en todo el dominio X):

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} g \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \forall x \in X \quad f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g(x).$$

Escribimos lo mismo con 4 cuantificadores:

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} g \quad \iff \quad \forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Definición (convergencia uniforme)

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} g \quad \iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Comparación de la convergencia uniforme con la convergencia puntual

Proposición

Sean $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^X)^{\mathbb{N}}$ y $g \in \mathbb{C}^X$ tales que

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} g.$$

Entonces

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} g.$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} g \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} g \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} g \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\implies \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in X \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} g \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\implies \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in X \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

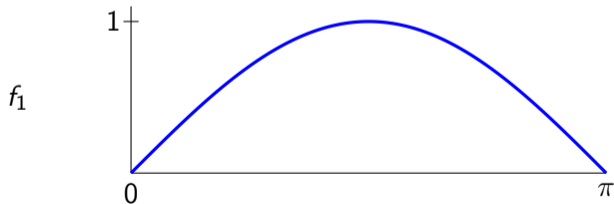
$$\iff f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} g.$$

Ejemplo 1: convergencia uniforme

$$X = [0, \pi], \quad f_n(x) = \frac{\text{sen}(x)}{n}, \quad g(x) = 0.$$

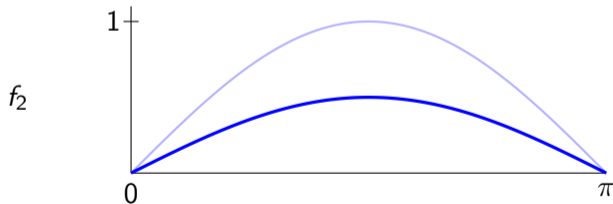
Ejemplo 1: convergencia uniforme

$$X = [0, \pi], \quad f_n(x) = \frac{\text{sen}(x)}{n}, \quad g(x) = 0.$$



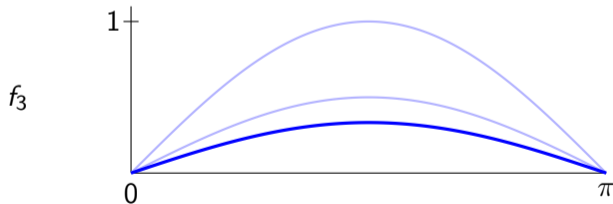
Ejemplo 1: convergencia uniforme

$$X = [0, \pi], \quad f_n(x) = \frac{\text{sen}(x)}{n}, \quad g(x) = 0.$$



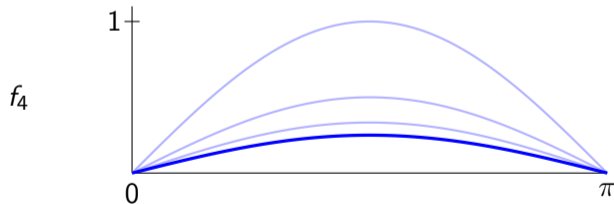
Ejemplo 1: convergencia uniforme

$$X = [0, \pi], \quad f_n(x) = \frac{\text{sen}(x)}{n}, \quad g(x) = 0.$$



Ejemplo 1: convergencia uniforme

$$X = [0, \pi], \quad f_n(x) = \frac{\text{sen}(x)}{n}, \quad g(x) = 0.$$



Ejemplo 1: convergencia uniforme

$$X = [0, \pi], \quad f_n(x) = \frac{\text{sen}(x)}{n}, \quad g(x) = 0.$$

Demostremos que $f_n \xrightarrow{X} g$.

Ejemplo 1: convergencia uniforme

$$X = [0, \pi], \quad f_n(x) = \frac{\text{sen}(x)}{n}, \quad g(x) = 0.$$

Demostremos que $f_n \xrightarrow{X} g$.

Sea $\varepsilon > 0$.

Ejemplo 1: convergencia uniforme

$$X = [0, \pi], \quad f_n(x) = \frac{\text{sen}(x)}{n}, \quad g(x) = 0.$$

Demostremos que $f_n \xrightarrow{X} g$.

Sea $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$k := \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1.$$

Ejemplo 1: convergencia uniforme

$$X = [0, \pi], \quad f_n(x) = \frac{\text{sen}(x)}{n}, \quad g(x) = 0.$$

Demostremos que $f_n \xrightarrow{X} g$.

Sea $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$k := \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1.$$

Entonces para cada $n \geq k$ y cada x en $[0, \pi]$ tenemos

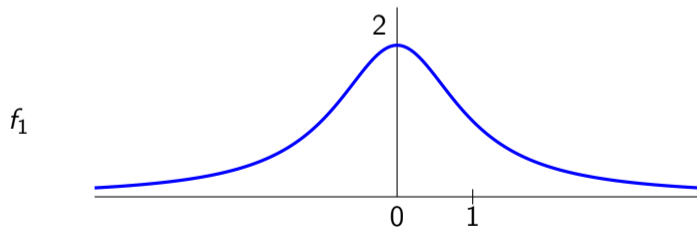
$$|f_n(x) - g(x)| = \frac{|\text{sen}(x)|}{n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \quad g(x) = 2.$$

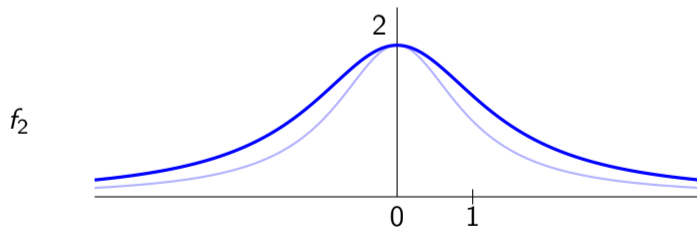
Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \quad g(x) = 2.$$



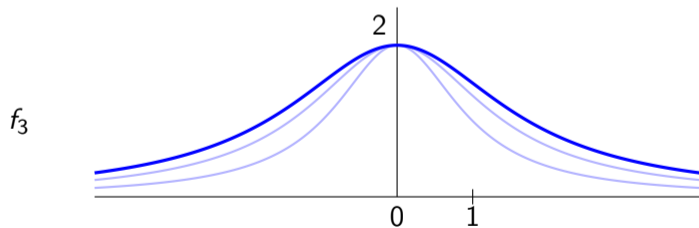
Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \quad g(x) = 2.$$



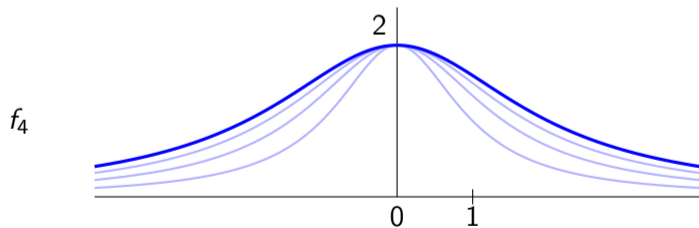
Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \quad g(x) = 2.$$



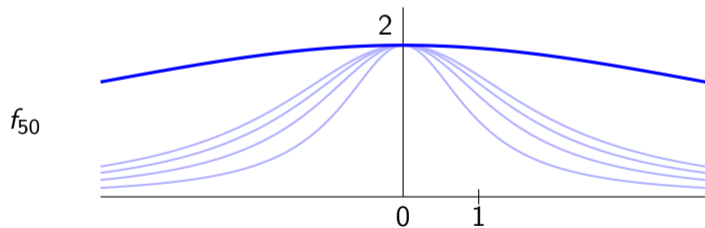
Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \quad g(x) = 2.$$



Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \quad g(x) = 2.$$



Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \quad g(x) = 2.$$

Obviamente, para cada x en \mathbb{R}

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{x^2}{n}} = 2.$$

Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \quad g(x) = 2.$$

Mostremos que no se tiene la convergencia uniforme, esto es,

Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \quad g(x) = 2.$$

Mostremos que no se tiene la convergencia uniforme, esto es,

$$\exists \varepsilon > 0$$

Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \quad g(x) = 2.$$

Mostremos que no se tiene la convergencia uniforme, esto es,

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \quad g(x) = 2.$$

Mostremos que no se tiene la convergencia uniforme, esto es,

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad \exists x \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{2n}{n+x^2}, \quad g(x) = 2.$$

Mostremos que no se tiene la convergencia uniforme, esto es,

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon.$$

Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \quad g(x) = 2.$$

Mostremos que no se tiene la convergencia uniforme, esto es,

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon := \frac{1}{2}$. Dado k en \mathbb{N} , pongamos $n := k$, $x := \sqrt{k}$.

Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{2n}{n+x^2}, \quad g(x) = 2.$$

Mostremos que no se tiene la convergencia uniforme, esto es,

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon := \frac{1}{2}$. Dado k en \mathbb{N} , pongamos $n := k$, $x := \sqrt{k}$.

Entonces $f_n(x) = f_k(\sqrt{k}) = 1$ y

$$|f_n(x) - g(x)| =$$

Ejemplo 2: convergencia puntual, pero no uniforme

$$X = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{2n}{n+x^2}, \quad g(x) = 2.$$

Mostremos que no se tiene la convergencia uniforme, esto es,

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon := \frac{1}{2}$. Dado k en \mathbb{N} , pongamos $n := k$, $x := \sqrt{k}$.

Entonces $f_n(x) = f_k(\sqrt{k}) = 1$ y

$$|f_n(x) - g(x)| = |1 - 2| = 1 \geq \varepsilon.$$

Plan

- 1 Convergencia puntual y uniforme
- 2 La convergencia uniforme y la seminorma-supremo
- 3 Criterio en términos de $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

La seminorma-supremo

Sea X un conjunto. Definimos $N_{\text{sup}}: \mathbb{C}^X \rightarrow [0, +\infty]$,

$$N_{\text{sup}}(f) := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

La seminorma-supremo

Sea X un conjunto. Definimos $N_{\text{sup}}: \mathbb{C}^X \rightarrow [0, +\infty]$,

$$N_{\text{sup}}(f) := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Es fácil ver que N_{sup} tiene las siguientes propiedades:

- es subaditiva;
- es absolutamente homogénea;
- para cada f en \mathbb{C}^X , si $N_{\text{sup}}(f) = 0$, entonces $f = 0_X$.

La seminorma-supremo

Sea X un conjunto. Definimos $N_{\text{sup}}: \mathbb{C}^X \rightarrow [0, +\infty]$,

$$N_{\text{sup}}(f) := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Es fácil ver que N_{sup} tiene las siguientes propiedades:

- es subaditiva;
- es absolutamente homogénea;
- para cada f en \mathbb{C}^X , si $N_{\text{sup}}(f) = 0$, entonces $f = 0_X$.

En general, no podemos afirmar que N_{sup} es una norma, porque

La seminorma-supremo

Sea X un conjunto. Definimos $N_{\text{sup}}: \mathbb{C}^X \rightarrow [0, +\infty]$,

$$N_{\text{sup}}(f) := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Es fácil ver que N_{sup} tiene las siguientes propiedades:

- es subaditiva;
- es absolutamente homogénea;
- para cada f en \mathbb{C}^X , si $N_{\text{sup}}(f) = 0$, entonces $f = 0_X$.

En general, no podemos afirmar que N_{sup} es una norma, porque puede tomar el valor $+\infty$.

La norma-supremo

Sea X un conjunto.

Denotamos por $B(X)$ al conjunto de todas las funciones acotadas $X \rightarrow \mathbb{C}$.

La norma-supremo

Sea X un conjunto.

Denotamos por $B(X)$ al conjunto de todas las funciones acotadas $X \rightarrow \mathbb{C}$.

Definimos $\|\cdot\|_{\text{sup}}: B(X) \rightarrow [0, +\infty)$,

$$\|f\|_{\text{sup}} := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

La norma-supremo

Sea X un conjunto.

Denotamos por $B(X)$ al conjunto de todas las funciones acotadas $X \rightarrow \mathbb{C}$.

Definimos $\|\cdot\|_{\text{sup}}: B(X) \rightarrow [0, +\infty)$,

$$\|f\|_{\text{sup}} := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

En otras palabras, $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ es la restricción de N_{sup} al conjunto $B(X)$.

También restringimos el codominio, de $[0, +\infty]$ a $[0, +\infty)$.

La norma-supremo

Sea X un conjunto.

Denotamos por $B(X)$ al conjunto de todas las funciones acotadas $X \rightarrow \mathbb{C}$.

Definimos $\|\cdot\|_{\text{sup}}: B(X) \rightarrow [0, +\infty)$,

$$\|f\|_{\text{sup}} := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

En otras palabras, $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ es la restricción de N_{sup} al conjunto $B(X)$.

También restringimos el codominio, de $[0, +\infty]$ a $[0, +\infty)$.

$B(X)$ con la norma $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ es un espacio de Banach.

Convergencia uniforme en términos de la seminorma-supremo

Proposición

Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^X)^{\mathbb{N}}$ y sea $g \in \mathbb{C}^X$. Entonces

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} g \quad \iff \quad \lim_{n \rightarrow \infty} N_{\text{sup}}(f_n - g) = 0.$$

Demostración, \Rightarrow

Supongamos que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} g$. Queremos demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} N_{\text{sup}}(f_n - g) = 0$.

Demostración, \Rightarrow

Supongamos que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} g$. Queremos demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} N_{\text{sup}}(f_n - g) = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la suposición encontramos k en \mathbb{N} tal que

$$\forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Demostración, \Rightarrow

Supongamos que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} g$. Queremos demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} N_{\text{sup}}(f_n - g) = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la suposición encontramos k en \mathbb{N} tal que

$$\forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pasando al supremo perdemos la desigualdad estricta:

$$\forall n \geq k$$

Demostración, \Rightarrow

Supongamos que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} g$. Queremos demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} N_{\text{sup}}(f_n - g) = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la suposición encontramos k en \mathbb{N} tal que

$$\forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pasando al supremo perdemos la desigualdad estricta:

$$\forall n \geq k \quad \sup_{x \in X} |f_n(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Demostración, \Rightarrow

Supongamos que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} g$. Queremos demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} N_{\text{sup}}(f_n - g) = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la suposición encontramos k en \mathbb{N} tal que

$$\forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pasando al supremo perdemos la desigualdad estricta:

$$\forall n \geq k \quad \sup_{x \in X} |f_n(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Usamos el hecho que $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$: $\forall n \geq k \quad N_{\text{sup}}(f_n - g) < \varepsilon$.

Demostración, \Leftarrow

Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} N_{\text{sup}}(f_n - g) = 0$.

Demostración, \Leftarrow

Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} N_{\text{sup}}(f_n - g) = 0$.

Queremos demostrar que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} g$.

Demostración, \Leftarrow

Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} N_{\text{sup}}(f_n - g) = 0$.

Queremos demostrar que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} g$.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la suposición, encontramos k en \mathbb{N} tal que

Demostración, \Leftarrow

Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} N_{\text{sup}}(f_n - g) = 0$.

Queremos demostrar que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} g$.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la suposición, encontramos k en \mathbb{N} tal que

$$\forall n \geq k \quad N_{\text{sup}}(f_n - g) < \varepsilon.$$

Demostración, \Leftarrow

Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} N_{\text{sup}}(f_n - g) = 0$.

Queremos demostrar que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} g$.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la suposición, encontramos k en \mathbb{N} tal que

$$\forall n \geq k \quad N_{\text{sup}}(f_n - g) < \varepsilon.$$

Por la definición de sup, esto implica que

Demostración, \Leftarrow

Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} N_{\text{sup}}(f_n - g) = 0$.

Queremos demostrar que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} g$.

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la suposición, encontramos k en \mathbb{N} tal que

$$\forall n \geq k \quad N_{\text{sup}}(f_n - g) < \varepsilon.$$

Por la definición de sup, esto implica que

$$\forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| \leq N_{\text{sup}}(f_n - g) < \varepsilon.$$

Ejemplo 1, análisis con la norma-supremo

$$X = [0, \pi], \quad f_n(x) = \frac{\text{sen}(x)}{n}, \quad g(x) = 0.$$

Ejemplo 1, análisis con la norma-supremo

$$X = [0, \pi], \quad f_n(x) = \frac{\text{sen}(x)}{n}, \quad g(x) = 0.$$

En este ejemplo,

$$|f_n(x) - g(x)| = f_n(x) = \frac{\text{sen}(x)}{n}.$$

Para cada n en \mathbb{N} , la función f_n alcanza su máximo en el punto

Ejemplo 1, análisis con la norma-supremo

$$X = [0, \pi], \quad f_n(x) = \frac{\text{sen}(x)}{n}, \quad g(x) = 0.$$

En este ejemplo,

$$|f_n(x) - g(x)| = f_n(x) = \frac{\text{sen}(x)}{n}.$$

Para cada n en \mathbb{N} , la función f_n alcanza su máximo en el punto $\frac{\pi}{2}$.

Ejemplo 1, análisis con la norma-supremo

$$X = [0, \pi], \quad f_n(x) = \frac{\text{sen}(x)}{n}, \quad g(x) = 0.$$

En este ejemplo,

$$|f_n(x) - g(x)| = f_n(x) = \frac{\text{sen}(x)}{n}.$$

Para cada n en \mathbb{N} , la función f_n alcanza su máximo en el punto $\frac{\pi}{2}$.

Por eso

$$\|f_n - g\|_{\text{sup}} =$$

Ejemplo 1, análisis con la norma-supremo

$$X = [0, \pi], \quad f_n(x) = \frac{\text{sen}(x)}{n}, \quad g(x) = 0.$$

En este ejemplo,

$$|f_n(x) - g(x)| = f_n(x) = \frac{\text{sen}(x)}{n}.$$

Para cada n en \mathbb{N} , la función f_n alcanza su máximo en el punto $\frac{\pi}{2}$.

Por eso

$$\|f_n - g\|_{\text{sup}} = f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{n}.$$

Ejemplo 1, análisis con la norma-supremo

$$X = [0, \pi], \quad f_n(x) = \frac{\text{sen}(x)}{n}, \quad g(x) = 0.$$

En este ejemplo,

$$|f_n(x) - g(x)| = f_n(x) = \frac{\text{sen}(x)}{n}.$$

Para cada n en \mathbb{N} , la función f_n alcanza su máximo en el punto $\frac{\pi}{2}$.

Por eso

$$\|f_n - g\|_{\text{sup}} = f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{n}.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - g\|_{\text{sup}} = 0$, concluimos que $f_n \xrightarrow{[0, \pi]} g$.

Ejemplo 2, análisis con la norma-supremo

$$X = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \quad g(x) = 2.$$

Ejemplo 2, análisis con la norma-supremo

$$X = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{2n}{n + x^2}, \quad g(x) = 2.$$

Consideramos la función

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)|$$

Ejemplo 2, análisis con la norma-supremo

$$X = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{2n}{n+x^2}, \quad g(x) = 2.$$

Consideramos la función

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = 2 - \frac{2n}{n+x^2}$$

Ejemplo 2, análisis con la norma-supremo

$$X = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{2n}{n+x^2}, \quad g(x) = 2.$$

Consideramos la función

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = 2 - \frac{2n}{n+x^2} = \frac{2x^2}{n+x^2}.$$

Ejemplo 2, análisis con la norma-supremo

$$X = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{2n}{n+x^2}, \quad g(x) = 2.$$

Consideramos la función

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = 2 - \frac{2n}{n+x^2} = \frac{2x^2}{n+x^2}.$$

Como h_n es par y creciente,

$$\|h_n\|_{\text{sup}} =$$

Ejemplo 2, análisis con la norma-supremo

$$X = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{2n}{n+x^2}, \quad g(x) = 2.$$

Consideramos la función

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = 2 - \frac{2n}{n+x^2} = \frac{2x^2}{n+x^2}.$$

Como h_n es par y creciente,

$$\|h_n\|_{\text{sup}} = \sup_{x \in [0, +\infty)} |h_n(x)| =$$

Ejemplo 2, análisis con la norma-supremo

$$X = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{2n}{n+x^2}, \quad g(x) = 2.$$

Consideramos la función

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = 2 - \frac{2n}{n+x^2} = \frac{2x^2}{n+x^2}.$$

Como h_n es par y creciente,

$$\|h_n\|_{\text{sup}} = \sup_{x \in [0, +\infty)} |h_n(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} h_n(x) = 2.$$

Ejemplo 2, análisis con la norma-supremo

$$X = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{2n}{n+x^2}, \quad g(x) = 2.$$

Consideramos la función

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = 2 - \frac{2n}{n+x^2} = \frac{2x^2}{n+x^2}.$$

Como h_n es par y creciente,

$$\|h_n\|_{\text{sup}} = \sup_{x \in [0, +\infty)} |h_n(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} h_n(x) = 2.$$

Resumen: $\|f_n - g\|_{\text{sup}} = 2$ para cada n .

Ejemplo 2, análisis con la norma-supremo

$$X = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{2n}{n+x^2}, \quad g(x) = 2.$$

Consideramos la función

$$h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = 2 - \frac{2n}{n+x^2} = \frac{2x^2}{n+x^2}.$$

Como h_n es par y creciente,

$$\|h_n\|_{\text{sup}} = \sup_{x \in [0, +\infty)} |h_n(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} h_n(x) = 2.$$

Resumen: $\|f_n - g\|_{\text{sup}} = 2$ para cada n . Esta sucesión no tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$.

Ejercicio. Sea $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ y sea $a \in X$. Muestre que

$$|f(a)| \leq N_{\text{sup}}(f).$$

Ejercicio. Sean $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^X)^{\mathbb{N}}$, $g \in \mathbb{C}^X$, $a \in X$. Muestre que

$$|f_n(a) - g(a)| \leq N_{\text{sup}}(f_n - g).$$

Ejercicio. Usando el resultado del ejercicio anterior muestre que la convergencia uniforme implica la convergencia puntual.

Plan

- 1 Convergencia puntual y uniforme
- 2 La convergencia uniforme y la seminorma-supremo
- 3 Criterio en términos de $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

Definición de los conjuntos auxiliares

Sean X un conjunto, $f_n: X \rightarrow \mathbb{C}$ para cada n en \mathbb{N} , $g: X \rightarrow \mathbb{C}$.

Definimos

$$A(\varepsilon, n) := \{x \in X : |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\},$$

$$B(\varepsilon, k) := \bigcup_{n \geq k} A(\varepsilon, n),$$

$$C(\varepsilon) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B(\varepsilon, k),$$

$$D := \bigcup_{\varepsilon > 0} C(\varepsilon).$$

D es el conjunto de no convergencia (repaso)

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(x) \quad \iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

D es el conjunto de no convergencia (repaso)

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Luego

$$f_n(x) \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g(x) \iff$$

D es el conjunto de no convergencia (repaso)

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Luego

$$f_n(x) \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g(x) \iff \exists \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon$$

D es el conjunto de no convergencia (repaso)

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Luego

$$f_n(x) \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g(x) \iff \exists \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon$$

$$\iff x \in \bigcup_{\varepsilon > 0} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq k} A(\varepsilon, n)$$

D es el conjunto de no convergencia (repaso)

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Luego

$$f_n(x) \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g(x) \iff \exists \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon$$

$$\iff x \in \bigcup_{\varepsilon > 0} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq k} A(\varepsilon, n) \iff x \in D.$$

D es el conjunto de no convergencia (repass)

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Luego

$$f_n(x) \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g(x) \iff \exists \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq k \quad |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon$$

$$\iff x \in \bigcup_{\varepsilon > 0} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq k} A(\varepsilon, n) \iff x \in D.$$

Proposición (D es el conjunto de no convergencia)

$$\{x \in X : f_n(x) \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g(x)\} = D.$$

Criterio de convergencia puntual en términos del conjunto D (repass)

Proposición

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} g \iff D = \emptyset.$$

Criterio de convergencia uniforme en términos de $B(\varepsilon, k)$

Proposición

$$f \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} g \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad B(\varepsilon, k) = \emptyset.$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow{X} g \iff$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow{X} g \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow{X} g \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$
$$\iff$$

Demostración.

$$\begin{aligned} f_n \xrightarrow{X} g &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\ &\iff \end{aligned}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} f_n \xrightarrow{X} g &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq k \quad x \notin A(\varepsilon, n) \end{aligned}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} f_n \xrightarrow{X} g &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq k \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\ &\iff \end{aligned}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} f_n \xrightarrow{X} g &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq k \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \neg(\exists n \geq k \quad x \in A(\varepsilon, n)) \end{aligned}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} f_n \xrightarrow{X} g &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq k \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \neg(\exists n \geq k \quad x \in A(\varepsilon, n)) \\ &\iff \end{aligned}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} f_n \xrightarrow{X} g &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq k \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \neg(\exists n \geq k \quad x \in A(\varepsilon, n)) \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \neg(x \in B(\varepsilon, k)) \end{aligned}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 f_n \xrightarrow{X} g &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon \\
 &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\
 &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq k \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\
 &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \neg(\exists n \geq k \quad x \in A(\varepsilon, n)) \\
 &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \neg(x \in B(\varepsilon, k)) \\
 &\iff
 \end{aligned}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 f_n \xrightarrow{X} g &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon \\
 &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\
 &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq k \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\
 &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \neg(\exists n \geq k \quad x \in A(\varepsilon, n)) \\
 &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \neg(x \in B(\varepsilon, k)) \\
 &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad x \notin B(\varepsilon, k)
 \end{aligned}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 f_n \xrightarrow{X} g &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon \\
 &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\
 &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq k \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\
 &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \neg(\exists n \geq k \quad x \in A(\varepsilon, n)) \\
 &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \neg(x \in B(\varepsilon, k)) \\
 &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad x \notin B(\varepsilon, k) \\
 &\iff
 \end{aligned}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 f_n \xrightarrow{X} g &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon \\
 &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\
 &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq k \quad x \notin A(\varepsilon, n) \\
 &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \neg(\exists n \geq k \quad x \in A(\varepsilon, n)) \\
 &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \neg(x \in B(\varepsilon, k)) \\
 &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad x \notin B(\varepsilon, k) \\
 &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad B(\varepsilon, k) = \emptyset.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2, análisis con $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

$$X = \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{2n}{n+x^2}, \quad g(x) = 2, \quad h_n(x) := |f_n(x) - g(x)| = \frac{2x^2}{n+x^2}.$$

$$\begin{aligned} x \in A(\varepsilon, n) &\iff h_n(x) \geq \varepsilon &\iff 2x^2 \geq \varepsilon x^2 + \varepsilon n \\ &\iff (2 - \varepsilon)x^2 \geq \varepsilon n. \end{aligned}$$

Luego

$$A(\varepsilon, n) = \begin{cases} \left(-\infty, -\sqrt{\frac{n\varepsilon}{2-\varepsilon}} \right] \cup \left[\sqrt{\frac{n\varepsilon}{2-\varepsilon}}, +\infty \right), & \varepsilon \leq 2; \\ \emptyset, & \varepsilon > 2. \end{cases}$$

Ejemplo 2, análisis con $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

$$A(\varepsilon, n) = \begin{cases} \left(-\infty, -\sqrt{\frac{n\varepsilon}{2-\varepsilon}} \right] \cup \left[\sqrt{\frac{n\varepsilon}{2-\varepsilon}}, +\infty \right), & 0 < \varepsilon < 2; \\ \emptyset, & \varepsilon \geq 2. \end{cases}$$

Ejemplo 2, análisis con $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

$$A(\varepsilon, n) = \begin{cases} \left(-\infty, -\sqrt{\frac{n\varepsilon}{2-\varepsilon}} \right] \cup \left[\sqrt{\frac{n\varepsilon}{2-\varepsilon}}, +\infty \right), & 0 < \varepsilon < 2; \\ \emptyset, & \varepsilon \geq 2. \end{cases}$$

En este ejemplo, para cada ε fijo, la sucesión $(A(\varepsilon, n))_{n \in \mathbb{N}}$ es

Ejemplo 2, análisis con $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

$$A(\varepsilon, n) = \begin{cases} \left(-\infty, -\sqrt{\frac{n\varepsilon}{2-\varepsilon}} \right] \cup \left[\sqrt{\frac{n\varepsilon}{2-\varepsilon}}, +\infty \right), & 0 < \varepsilon < 2; \\ \emptyset, & \varepsilon \geq 2. \end{cases}$$

En este ejemplo, para cada ε fijo, la sucesión $(A(\varepsilon, n))_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente. Por eso

$$B(\varepsilon, k) = \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n) =$$

Ejemplo 2, análisis con $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

$$A(\varepsilon, n) = \begin{cases} \left(-\infty, -\sqrt{\frac{n\varepsilon}{2-\varepsilon}} \right] \cup \left[\sqrt{\frac{n\varepsilon}{2-\varepsilon}}, +\infty \right), & 0 < \varepsilon < 2; \\ \emptyset, & \varepsilon \geq 2. \end{cases}$$

En este ejemplo, para cada ε fijo, la sucesión $(A(\varepsilon, n))_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente. Por eso

$$B(\varepsilon, k) = \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n) = A(\varepsilon, k).$$

Ejemplo 2, análisis con $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

$$B(\varepsilon, k) = \begin{cases} \left((-\infty, -\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}] \cup [\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}, +\infty) \right), & 0 < \varepsilon < 2; \\ \emptyset, & \varepsilon \geq 2. \end{cases}$$

En particular, para $\varepsilon = 1$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad B(\varepsilon, k) = (-\infty, -\sqrt{k}] \cup [\sqrt{k}, +\infty) \neq \emptyset.$$

Hemos comprobado que no se tiene la convergencia uniforme.

Ejemplo 2, análisis con $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

$$B(\varepsilon, k) = \begin{cases} \left(-\infty, -\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}} \right] \cup \left[\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}, +\infty \right), & 0 < \varepsilon < 2; \\ \emptyset, & \varepsilon \geq 2. \end{cases}$$

Ejemplo 2, análisis con $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

$$B(\varepsilon, k) = \begin{cases} \left((-\infty, -\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}] \cup \left[\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}, +\infty \right), & 0 < \varepsilon < 2; \\ \emptyset, & \varepsilon \geq 2. \end{cases}$$

Si $\varepsilon \in (0, 2)$ está fijo,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}} = +\infty.$$

Luego, para cada $\varepsilon > 0$, no ningún punto que pertenezca a todos los conjuntos $B(\varepsilon, k)$:

$$C(\varepsilon) =$$

Ejemplo 2, análisis con $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

$$B(\varepsilon, k) = \begin{cases} \left(-\infty, -\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}} \right] \cup \left[\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}, +\infty \right), & 0 < \varepsilon < 2; \\ \emptyset, & \varepsilon \geq 2. \end{cases}$$

Si $\varepsilon \in (0, 2)$ está fijo,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}} = +\infty.$$

Luego, para cada $\varepsilon > 0$, no ningún punto que pertenezca a todos los conjuntos $B(\varepsilon, k)$:

$$C(\varepsilon) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B(\varepsilon, k) =$$

Ejemplo 2, análisis con $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

$$B(\varepsilon, k) = \begin{cases} \left(-\infty, -\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}} \right] \cup \left[\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}, +\infty \right), & 0 < \varepsilon < 2; \\ \emptyset, & \varepsilon \geq 2. \end{cases}$$

Si $\varepsilon \in (0, 2)$ está fijo,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}} = +\infty.$$

Luego, para cada $\varepsilon > 0$, no ningún punto que pertenezca a todos los conjuntos $B(\varepsilon, k)$:

$$C(\varepsilon) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B(\varepsilon, k) = \emptyset.$$

Finalmente, $D =$

Ejemplo 2, análisis con $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

$$B(\varepsilon, k) = \begin{cases} \left((-\infty, -\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}] \cup \left[\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}, +\infty \right), & 0 < \varepsilon < 2; \\ \emptyset, & \varepsilon \geq 2. \end{cases}$$

Si $\varepsilon \in (0, 2)$ está fijo,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}} = +\infty.$$

Luego, para cada $\varepsilon > 0$, no ningún punto que pertenezca a todos los conjuntos $B(\varepsilon, k)$:

$$C(\varepsilon) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B(\varepsilon, k) = \emptyset.$$

Finalmente, $D = \bigcup_{\varepsilon > 0} C(\varepsilon) = \emptyset.$

Ejemplo 2, análisis con $A(\varepsilon, n)$ y $B(\varepsilon, k)$

$$B(\varepsilon, k) = \begin{cases} \left(-\infty, -\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}} \right] \cup \left[\sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}}, +\infty \right), & 0 < \varepsilon < 2; \\ \emptyset, & \varepsilon \geq 2. \end{cases}$$

Si $\varepsilon \in (0, 2)$ está fijo,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{k\varepsilon}{2-\varepsilon}} = +\infty.$$

Luego, para cada $\varepsilon > 0$, no ningún punto que pertenezca a todos los conjuntos $B(\varepsilon, k)$:

$$C(\varepsilon) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B(\varepsilon, k) = \emptyset.$$

Finalmente, $D = \bigcup_{\varepsilon > 0} C(\varepsilon) = \emptyset.$ Hemos comprobado que $f_n \xrightarrow{\mathbb{R}} g.$

Ejercicio.

Demostrar que la convergencia uniforme implica la convergencia puntual, razonando en términos de $B(\varepsilon, k)$, $C(\varepsilon)$ y D .

Proposición (criterio de convergencia uniforme fuera de un conjunto)

Sean $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^X)^{\mathbb{N}}$, $g \in \mathbb{C}^X$, $Y \subseteq X$. Entonces

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X \setminus Y} g \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad B(\varepsilon, k) \subseteq Y.$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow{X \setminus Y} g$$



Demostración.

$$f_n \xrightarrow{X \setminus Y} g$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus Y \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow{X \setminus Y} g$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus Y \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow{X \setminus Y} g$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus Y \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad \left(\quad \Rightarrow \quad \right)$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow{X \setminus Y} g$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus Y \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad (x \notin Y \Rightarrow x \notin A(\varepsilon, n))$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow{X \setminus Y} g$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus Y \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad (x \notin Y \Rightarrow x \notin A(\varepsilon, n))$$

$$\iff$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow{X \setminus Y} g$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus Y \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad (x \notin Y \Rightarrow x \notin A(\varepsilon, n))$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad (\quad \Rightarrow \quad)$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow{X \setminus Y} g$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus Y \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad (x \notin Y \Rightarrow x \notin A(\varepsilon, n))$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad (x \in A(\varepsilon, n) \Rightarrow x \in Y)$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow{X \setminus Y} g$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus Y \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad (x \notin Y \Rightarrow x \notin A(\varepsilon, n))$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad (x \in A(\varepsilon, n) \Rightarrow x \in Y)$$

$$\iff$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow{X \setminus Y} g$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus Y \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad (x \notin Y \Rightarrow x \notin A(\varepsilon, n))$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad (x \in A(\varepsilon, n) \Rightarrow x \in Y)$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad A(\varepsilon, n) \subseteq Y$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow{X \setminus Y} g$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus Y \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad (x \notin Y \Rightarrow x \notin A(\varepsilon, n))$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad (x \in A(\varepsilon, n) \Rightarrow x \in Y)$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad A(\varepsilon, n) \subseteq Y$$

$$\iff$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow{X \setminus Y} g$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus Y \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad (x \notin Y \Rightarrow x \notin A(\varepsilon, n))$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad (x \in A(\varepsilon, n) \Rightarrow x \in Y)$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad A(\varepsilon, n) \subseteq Y$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \bigcup_{n \geq k} A(\varepsilon, n) \subseteq Y$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow{X \setminus Y} g$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus Y \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad (x \notin Y \Rightarrow x \notin A(\varepsilon, n))$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad (x \in A(\varepsilon, n) \Rightarrow x \in Y)$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad A(\varepsilon, n) \subseteq Y$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \bigcup_{n \geq k} A(\varepsilon, n) \subseteq Y$$

$$\iff$$

Demostración.

$$f_n \xrightarrow{X \setminus Y} g$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \setminus Y \quad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad (x \notin Y \Rightarrow x \notin A(\varepsilon, n))$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \quad (x \in A(\varepsilon, n) \Rightarrow x \in Y)$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad A(\varepsilon, n) \subseteq Y$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \bigcup_{n \geq k} A(\varepsilon, n) \subseteq Y$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad B(\varepsilon, k) \subseteq Y.$$

Hemos estudiado el concepto de la convergencia uniforme.

Es uno de varios modos de convergencia.

