

# Conjuntos totalmente acotados en espacios métricos

**Objetivos.** Conocer el concepto de subconjunto acotado de un espacio métrico.

**Prerrequisitos.** Subespacio de un espacio métrico, vecindades uniformes de un conjunto, espacio métrico totalmente acotado.

**1 Repaso** (subespacio de un espacio métrico). Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $Y \subseteq X$ . Denotemos la restricción  $d|_{Y^2}$  por  $d_Y$ . Es fácil ver que  $(Y, d_Y)$  es un espacio métrico.

**2 Definición** (subconjunto totalmente acotado de un espacio métrico). Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $Y \subseteq X$ . Se dice que  $Y$  es *totalmente acotado* en  $(X, d)$  si  $(Y, d_Y)$  es un espacio métrico totalmente acotado.

**3 Observación.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico,  $Y \subseteq X$ ,  $A \subseteq Y$ ,  $\varepsilon > 0$ . Denotemos por  $V_Y(A, \varepsilon)$  a la  $\varepsilon$ -vecindad uniforme del conjunto  $A$  en el espacio métrico  $(Y, d_Y)$ :

$$V_Y(A, \varepsilon) := \left\{ y \in Y : D_A(y) < \varepsilon \right\}.$$

Obviamente,

$$V_Y(A, \varepsilon) = V(A, \varepsilon) \cap Y.$$

**4 Proposición** (varias formas equivalentes de la definición de subconjunto totalmente acotado de un espacio métrico). *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $Y \subseteq X$ . Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- $Y$  es totalmente acotado en  $X$ ;
- para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $A \subseteq Y$  tal que  $A$  es finito y  $Y = V(A, \varepsilon) \cap Y$ ;
- para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $A \subseteq Y$  tal que  $A$  es finito y  $Y \subseteq V(A, \varepsilon)$ ;
- para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $A \subseteq Y$  tal que  $A$  es finito y

$$Y \subseteq \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon).$$

*Demostración.* Ejercicio. □

**5 Proposición** (criterio de subconjunto totalmente acotado en términos de  $\varepsilon$ -redes externas). Sea  $X$  un espacio métrico y sea  $Y \subseteq X$ .  $Y$  es totalmente acotado si, y sólo si, para cada  $\varepsilon > 0$  existe un subconjunto finito  $A$  del espacio  $X$  tal que  $d(x, A) < \varepsilon$  para cada  $x$  en  $Y$ .

*Demostración.* La necesidad es obvia. Demostremos la suficiencia.

1. Sea  $\varepsilon > 0$ . Encontramos en  $X$  una  $\varepsilon/2$ -red finita  $A$  para el conjunto  $Y$ , es decir, un conjunto finito  $A \subseteq X$  tal que para cada  $y$  en  $Y$  se cumple que  $D_A(y) < \varepsilon/2$ .

2. Consideremos el siguiente subconjunto de  $A$ :

$$P := A \cap V_X(Y, \varepsilon/2), \quad \text{esto es,} \quad P = \left\{ a \in A : D_Y(a) < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Como  $A$  es finito,  $P$  también es finito. Sea  $m := \#P$ . Numeremos los elementos de  $P$ :

$$P = \{p_1, \dots, p_m\}.$$

3. Demostremos que  $P$  es una  $\varepsilon/2$ -red para  $Y$ . Dado  $y$  en  $Y$ , existe  $a$  en  $A$  tal que  $d(a, y) < \varepsilon/2$ . En particular, esto implica que  $D_Y(a) < \varepsilon/2$ , así que  $a \in P$ .

4. Para cada  $j$  en  $\{1, \dots, m\}$ , usando la propiedad  $D_Y(p_j) < \frac{\varepsilon}{2}$ , encontremos un punto  $q_j$  en  $Y$  tal que  $d(p_j, q_j) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Pongamos

$$Q := \{q_1, \dots, q_m\}.$$

Por construcción,  $Q$  es un subconjunto finito de  $Y$ .

5. Demostremos que  $Q$  es una  $\varepsilon$ -red para  $Y$ . Sea  $y \in Y$ . Por el resultado del paso 3, existe  $a$  en  $P$  tal que  $d(a, y) < \varepsilon/2$ . Encontramos  $j$  en  $\{1, \dots, m\}$  tal que  $a = p_j$ . Usamos la definición de  $D_Q(y)$  y la desigualdad del triángulo:

$$D_Q(y) \leq d(y, q_j) \leq d(y, p_j) + d(p_j, q_j) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como  $y$  es un elemento general de  $Y$ , hemos demostrado que  $Y \subseteq V(Q, \varepsilon)$ . □

**6 Observación.** En la demostración de la Proposición 5, el paso 5 se puede hacer de otra manera, trabajando con bolas. Para cada  $j$  en  $\{1, \dots, m\}$ , como  $d(p_j, q_j) < \varepsilon/2$ ,

$$B(p_j, \varepsilon/2) \subseteq B(q_j, \varepsilon).$$

Luego

$$Y \subseteq \bigcup_{j=1}^m B(p_j, \varepsilon/2) \subseteq \bigcup_{j=1}^m B(q_j, \varepsilon).$$

Agradezco a Edgar Osvaldo Rodríguez Pérez por explicarme este razonamiento.

**7 Proposición** (ser totalmente acotado es una propiedad hereditaria). Sea  $(X, d)$  un espacio métrico totalmente acotado y sea  $Y \subseteq X$ . Entonces,  $Y$  es totalmente acotado.

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ . Usando la suposición que  $X$  es totalmente acotado, encontramos  $A \subseteq X$  tal que  $A$  es finito y  $X = V(A, \varepsilon)$ . Luego  $Y \subseteq V(A, \varepsilon)$ . Por la Proposición 5, hemos demostrado que  $Y$  es totalmente acotado.  $\square$

**8 Corolario.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sean  $Z \subseteq Y \subseteq X$ . Supongamos que  $Y$  es totalmente acotado. Entonces,  $Z$  es totalmente acotado.

*Demostración.* Aplicamos la Proposición 7 al espacio métrico  $(Y, d_Y)$  y su subconjunto  $Z$ .  $\square$

**9 Proposición.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $a < b$ . Entonces,  $[a, b]$  es totalmente acotado.

*Demostración.* Pongamos  $L := b - a$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . Encontramos  $m \in \mathbb{N}$  tal que

$$m > \frac{L}{\varepsilon}.$$

Por ejemplo, puede servir

$$m := \left\lfloor \frac{L}{\varepsilon} \right\rfloor.$$

Consideremos la malla uniforme de  $m$  partes para el segmento  $[a, b]$ :

$$p_j := a + \frac{L}{m} j \quad (0 \leq j \leq m),$$

$$A := \left\{ p_j : 0 \leq j \leq m \right\}.$$

Obviamente,  $A \subseteq [a, b]$  y  $\#A = m + 1$ . Mostremos que  $A$  es una  $\varepsilon$ -red para  $[a, b]$ . Dado  $x$  en  $[a, b]$ , pongamos

$$k := \left\lfloor \frac{m(x - a)}{L} \right\rfloor.$$

Notemos que  $k \in \{0, \dots, m\}$  y

$$k \leq \frac{m(x - a)}{L} < k + 1.$$

Multiplicamos por  $L/m$  y sumamos  $a$ :

$$p_k = a + \frac{L}{m} k \leq x < a + \frac{L}{m} (k + 1) = p_{k+1}.$$

Por lo tanto,  $d(x, p_k) = x - p_k < p_{k+1} - p_k = \frac{L}{m} < \varepsilon$ .  $\square$

**10 Proposición.** Sea  $Y \subseteq \mathbb{R}$ . Entonces,  $Y$  es totalmente acotado si, y solo si,  $Y$  es acotado.

*Idea de demostración.* Si  $Y$  es acotado, entonces existe  $L > 0$  tal que  $Y \subseteq [-L, L]$ .  $\square$

**11 Proposición.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $Y \subseteq X$  tal que  $Y$  es totalmente acotado. Entonces,  $\text{cl}(Y)$  es totalmente acotado.

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ . Sea  $A \subseteq Y$  una  $\varepsilon/2$ -red para  $Y$ . En otras palabras,  $A$  es finito y  $Y \subseteq V(A, \varepsilon/2)$ . Mostremos que  $A$  es una  $\varepsilon$ -red para  $\text{cl}(Y)$ . Sea  $x \in \text{cl}(Y)$ . Encontramos  $y$  en  $Y$  tal que  $d(x, y) < \varepsilon/2$ . Encontramos  $a$  en  $A$  tal que  $d(y, a) < \varepsilon/2$ . Por la desigualdad del triángulo,

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

**12 Ejercicio** (las funciones Lipschitz-continuas convierten conjuntos totalmente acotados en conjuntos totalmente acotados). Sean  $(X, d)$ ,  $(Y, \rho)$  espacios métricos y sea  $f: X \rightarrow Y$  una función Lipschitz continua. Esto significa que existe  $L > 0$  tal que

$$\forall a, b \in X \quad \rho(f(a), f(b)) \leq L d(x, y).$$

Supongamos que  $Z \subseteq X$  y  $Z$  es acotado en  $X$ . Demostrar que  $f[Z]$  es acotado en  $Y$ .

**13 Ejercicio.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico totalmente acotado y sea  $(Z, \rho)$  una completación de  $(X, d)$ . Demuestre que  $(Z, \rho)$  es totalmente acotado.