Conjuntos totalmente acotados en espacios métricos (un tema de análisis)

Egor Maximenko,
http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

3 de febrero de 2022

Objetivo.

Conocer la definición de espacios métricos totalmente acotados
y la definición de conjuntos totalmente acotados en espacios métricos.

Prerrequisitos:

- bolas en espacios métricos,
- el diámetro de un conjunto,
- conjuntos acotados,
- la distancia entre dos conjuntos.

Repaso de la notación

En este tema suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

Repaso de la notación

En este tema suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

Dados a en X y $r > 0$, la bola con centro a y radio r es

$$B(a,r) \ := \ \{x \in X : \quad d(x,a) < r\}.$$

Repaso de la notación

En este tema suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

Dados a en X y $r > 0$, la bola con centro a y radio r es

$$B(a, r) \ := \ \{x \in X : \quad d(x, a) < r\}.$$

Dado $Y \subseteq X$, el diámetro de Y es

$$\operatorname{diam}(Y) \ := \ \sup\{d(x, y) : \quad x, y \in Y\}.$$

La distancia-ínfimo entre dos conjuntos

Dados $Y, Z \subseteq X$, la distancia entre Y y Z es

$$\operatorname{dist}(Y, Z) \;:=\; \inf\left\{d(a, b)\colon \quad a \in Y, \quad b \in Z\right\}.$$

La distancia-ínfimo entre dos conjuntos

Dados $Y, Z \subseteq X$, la distancia entre Y y Z es

$$\operatorname{dist}(Y, Z) := \inf \left\{ d(a, b) : \quad a \in Y, \quad b \in Z \right\}.$$

Dados a en X y $Z \subseteq X$,

$$\operatorname{dist}(a, Z) := \inf \left\{ d(a, b) : \quad b \in Z \right\}.$$

ε-vecindad de un conjunto

Definición

Sean $A \subseteq X$, $\varepsilon > 0$.

$$V(A, \varepsilon) := \{x \in X : \quad \operatorname{dist}(x, A) < \varepsilon\}.$$

ε-vecindad de un conjunto

Definición

Sean $A \subseteq X$, $\varepsilon > 0$.

$$V(A, \varepsilon) := \{x \in X : \quad \operatorname{dist}(x, A) < \varepsilon\}.$$

Proposición

Sean $A \subseteq X$, $\varepsilon > 0$. Entonces

$$V(A, \varepsilon) = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon).$$

Espacios métricos totalmente acotados

Definición

Sea X un espacio métrico. Se dice que X es totalmente acotado si para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito A de X tal que $d(x, A) < \varepsilon$ para cada x en X.

criterio elemental de espacio totalmente acotado

Proposición

Sea X un espacio métrico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) X es totalmente acotado;

(b) para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito A de X tal que

$$X = V(A, \varepsilon).$$

(c) para cada $\varepsilon > 0$ existe una colección finita $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X tal que

$$\Big(\cup\mathcal{C} = X\Big) \qquad \wedge \qquad \Big(\forall V \in \mathcal{C} \quad \operatorname{diam}(V) < \varepsilon\Big).$$

Cada espacio totalmente acotado es acotado

Ejercicio. Sea X un espacio métrico totalmente acotado. Demostrar que X es acotado.

Subconjuntos totalmente acotados de espacios métricos

Definición (subconjunto totalmente acotado de un espacio métrico)

Sea X un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$. Se dice que Y es totalmente acotado, si Y, considerado como subespacio métrico de X, es totalmente acotado.

Subconjuntos totalmente acotados de espacios métricos

Definición (subconjunto totalmente acotado de un espacio métrico)

Sea X un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$. Se dice que Y es totalmente acotado, si Y, considerado como subespacio métrico de X, es totalmente acotado.

Por la definición, Y es totalmente acotado $\iff$ existe $A \subseteq Y$ tal que A es finito y

$$V(A, \varepsilon) \cap Y = Y.$$

Criterio de conjunto totalmente acotado

Por la definición, Y es totalmente acotado $\iff$ existe $A \subseteq Y$ tal que A es finito y

$$V(A, \varepsilon) \cap Y = Y.$$

Criterio de conjunto totalmente acotado

Por la definición, Y es totalmente acotado $\iff$ existe $A \subseteq Y$ tal que A es finito y

$$V(A, \varepsilon) \cap Y = Y.$$

Proposición

Sea X un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$. Entonces Y es totalmente acotado si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe $A \subseteq X$ tal que A es finito y

$$Y \subseteq V(A, \varepsilon).$$

Ser totalmente acotado es una propiedad hereditaria

Proposición

Sea X un espacio métrico totalmente acotado y sea $Y \subseteq X$. Entonces Y es totalmente acotado.

Los intervalos con extremos finitos son totalmente acotados

Proposición

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Entonces $[a, b]$ es totalmente acotado.

Criterio de subconjuntos totalmente acotados en $\mathbb{R}$

Proposición

Sea $Y \subseteq \mathbb{R}$. Entonces Y es totalmente acotado si, y solo si, Y es acotado.