Conjuntos totalmente acotados en espacios métricos, continuación

(un tema de análisis)

Egor Maximenko,

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

10 de febrero de 2022

Objetivos.

Conocer propiedades más avanzados de espacios métricos totalmente acotados:

- un criterio de espacios no totalmente acotados;
- relación entre espacios totalmente acotados y espacios separables;
- un criterio de espacios totalmente acotados en términos de sucesiones de Cauchy.

Prerrequisitos:

- espacios métricos totalmente acotados;
- espacios separables;
- sucesiones de Cauchy.

ε-vecindad de un conjunto (repaso)

Definición

Sean $A \subseteq X$, $\varepsilon > 0$.

$$V(A, \varepsilon) := \{x \in X : \quad \operatorname{dist}(x, A) < \varepsilon\}.$$

ε-vecindad de un conjunto (repaso)

Definición

Sean $A \subseteq X$, $\varepsilon > 0$.

$$V(A, \varepsilon) := \{x \in X : \quad \operatorname{dist}(x, A) < \varepsilon\}.$$

Proposición

Sean $A \subseteq X$, $\varepsilon > 0$. Entonces

$$V(A, \varepsilon) = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon).$$

Espacios métricos totalmente acotados (repaso)

Definición

Sea X un espacio métrico. Se dice que X es totalmente acotado si para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito A de X tal que $V(A, \varepsilon) = X$.

Espacios métricos totalmente acotados (repaso)

Definición

Sea X un espacio métrico. Se dice que X es totalmente acotado si para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito A de X tal que $V(A, \varepsilon) = X$.

Cuando $V(A, \varepsilon) = X$, se dice que A es una ε-red en X.

Criterio de espacio métrico no totalmente acotado

Proposición

Sea X un espacio métrico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) X no es totalmente acotado;

(b) existen un $\varepsilon > 0$ y un subconjunto infinito M de X tal que

$$\forall x \in M \quad \forall y \in M \setminus \{x\} \quad d(x, y) \geq \varepsilon.$$

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que X no es totalmente acotado.

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Supongamos que X no es totalmente acotado.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que

Demostración, (a)⇒(b)

Supongamos que X no es totalmente acotado.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que para cada $A \subseteq X$ finito $V(A, \varepsilon) \neq X$.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que $\varepsilon > 0$, $M \subseteq X$, M es infinito y

$$\forall x \in M \quad \forall y \in M \setminus \{x\} \quad d(x, y) \geq \varepsilon.$$

Demostración, (b)⇒(a)

Supongamos que $\varepsilon > 0$, $M \subseteq X$, M es infinito y

$$\forall x \in M \quad \forall y \in M \setminus \{x\} \quad d(x,y) \geq \varepsilon.$$

Mostremos que X no es totalmente acotado.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que $\varepsilon > 0$, $M \subseteq X$, M es infinito y

$$\forall x \in M \quad \forall y \in M \setminus \{x\} \quad d(x, y) \geq \varepsilon.$$

Mostremos que X no es totalmente acotado.

Razonando por reducción al absurdo supongamos que X es totalmente acotado.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que $\varepsilon > 0$, $M \subseteq X$, M es infinito y

$$\forall x \in M \quad \forall y \in M \setminus \{x\} \quad d(x, y) \geq \varepsilon.$$

Mostremos que X no es totalmente acotado.

Razonando por reducción al absurdo supongamos que X es totalmente acotado.

Entonces M es totalmente acotado.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que $\varepsilon > 0$, $M \subseteq X$, M es infinito y

$$\forall x \in M \quad \forall y \in M \setminus \{x\} \quad d(x,y) \geq \varepsilon.$$

Mostremos que X no es totalmente acotado.

Razonando por reducción al absurdo supongamos que X es totalmente acotado.

Entonces M es totalmente acotado.

Sea $A \subseteq M$ tal que A es finito y $V(A,\varepsilon) \cap M = M$.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que $\varepsilon > 0$, $M \subseteq X$, M es infinito y

$$\forall x \in M \quad \forall y \in M \setminus \{x\} \quad d(x, y) \geq \varepsilon.$$

Mostremos que X no es totalmente acotado.

Razonando por reducción al absurdo supongamos que X es totalmente acotado.

Entonces M es totalmente acotado.

Sea $A \subseteq M$ tal que A es finito y $V(A, \varepsilon) \cap M = M$.

Para cada x en M encontramos a en A tal que $d(x, a) < \varepsilon$.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que $\varepsilon > 0$, $M \subseteq X$, M es infinito y

$$\forall x \in M \quad \forall y \in M \setminus \{x\} \quad d(x,y) \geq \varepsilon.$$

Mostremos que X no es totalmente acotado.

Razonando por reducción al absurdo supongamos que X es totalmente acotado.

Entonces M es totalmente acotado.

Sea $A \subseteq M$ tal que A es finito y $V(A,\varepsilon) \cap M = M$.

Para cada x en M encontramos a en A tal que $d(x,a) < \varepsilon$. Entonces

Demostración, (b)⇒(a)

Supongamos que $\varepsilon > 0$, $M \subseteq X$, M es infinito y

$$\forall x \in M \quad \forall y \in M \setminus \{x\} \quad d(x, y) \geq \varepsilon.$$

Mostremos que X no es totalmente acotado.

Razonando por reducción al absurdo supongamos que X es totalmente acotado.

Entonces M es totalmente acotado.

Sea $A \subseteq M$ tal que A es finito y $V(A, \varepsilon) \cap M = M$.

Para cada x en M encontramos a en A tal que $d(x, a) < \varepsilon$. Entonces $a = x$.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Supongamos que $\varepsilon > 0$, $M \subseteq X$, M es infinito y

$$\forall x \in M \quad \forall y \in M \setminus \{x\} \quad d(x, y) \geq \varepsilon.$$

Mostremos que X no es totalmente acotado.

Razonando por reducción al absurdo supongamos que X es totalmente acotado.

Entonces M es totalmente acotado.

Sea $A \subseteq M$ tal que A es finito y $V(A, \varepsilon) \cap M = M$.

Para cada x en M encontramos a en A tal que $d(x, a) < \varepsilon$. Entonces $a = x$.

Hemos mostrado que $A = M$.

Demostración, (b)⇒(a)

Supongamos que $\varepsilon > 0$, $M \subseteq X$, M es infinito y

$$\forall x \in M \quad \forall y \in M \setminus \{x\} \quad d(x, y) \geq \varepsilon.$$

Mostremos que X no es totalmente acotado.

Razonando por reducción al absurdo supongamos que X es totalmente acotado.

Entonces M es totalmente acotado.

Sea $A \subseteq M$ tal que A es finito y $V(A, \varepsilon) \cap M = M$.

Para cada x en M encontramos a en A tal que $d(x, a) < \varepsilon$. Entonces $a = x$.

Hemos mostrado que $A = M$. Pero A es finito y M es infinito.

Demostración, (b)⇒(a)

Supongamos que $\varepsilon > 0$, $M \subseteq X$, M es infinito y

$$\forall x \in M \quad \forall y \in M \setminus \{x\} \quad d(x, y) \geq \varepsilon.$$

Mostremos que X no es totalmente acotado.

Razonando por reducción al absurdo supongamos que X es totalmente acotado.

Entonces M es totalmente acotado.

Sea $A \subseteq M$ tal que A es finito y $V(A, \varepsilon) \cap M = M$.

Para cada x en M encontramos a en A tal que $d(x, a) < \varepsilon$. Entonces $a = x$.

Hemos mostrado que $A = M$. Pero A es finito y M es infinito. Contradicción.

Ejemplo

Denotamos por $C([0,1])$ el espacio de funciones continuas $[0,1] \to \mathbb{C}$, con la distancia

$$d(f,g) := \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(y)|.$$

Ejemplo

Denotamos por $C([0,1])$ el espacio de funciones continuas $[0,1] \to \mathbb{C}$, con la distancia

$$d(f,g) := \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(y)|.$$

En este espacio consideremos el conjunto

$$Y := \{f \in C([0,1]) \colon \quad \forall x \in [0,1] \quad |f(x)| \le 1\}.$$

Ejemplo

Denotamos por $C([0,1])$ el espacio de funciones continuas $[0,1] \to \mathbb{C}$, con la distancia

$$d(f,g) := \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(y)|.$$

En este espacio consideremos el conjunto

$$Y := \{f \in C([0,1]) \colon \quad \forall x \in [0,1] \quad |f(x)| \leq 1\}.$$

Demostrar que Y no es totalmente acotado.

Los espacios métricos totalmente acotados son separables

Proposición

Sea X un espacio métrico totalmente acotado. Entonces X es separable.

Demostración

Espacios métricos separables pueden no ser totalmente acotados

Ejercicio. Dar un ejemplo de espacio métrico que sea separable, pero no sea totalmente acotado.

Criterio de espacios métricos totalmente acotados en términos de sucesiones de Cauchy

Proposición

Sea X un espacio métrico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) X es totalmente acotado;

(b) cada sucesión en X contiene una subsucesión de Cauchy.

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)