Espacios métricos totalmente acotados, continuación

Objetivos. Seguir estudiando propiedades de espacios métricos totalmente acotados.

Prerrequisitos. Espacio métrico, subespacio de un espacio métrico, sucesión de Cauchy, espacio topológico separable.

Criterio de espacio métrico no totalmente acotado

1 Proposición (criterio de espacio métrico no totalmente acotado)**.** *Sea X un espacio métrico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) X no es totalmente acotado;

(b) existen $\varepsilon > 0$ y un subconjunto infinito M de X tal que

$$\forall x \in M \quad \forall y \in M \setminus \{x\} \quad d(x,y) \geq \varepsilon.$$

Demostración. Supongamos (a) y demostremos (b). Como X no es acotado, existe $\varepsilon > 0$ tal que en X no hay ε-red finita. Elegimos $a_1 \in X$. Como $\{a_1\}$ no es ε-red para X, existe a_2 en X tal que $d(a_1, a_2) \geq \varepsilon$. En el k-ésimo paso, encontramos a_k en X tal que $d(a_k, a_j) \geq \varepsilon$ para cada $j < k$. Pongamos $M := \{a_k \colon\ k \in \mathbb{N}\}$. Entonces ε y M tienen las propiedades requeridas.

Supongamos (b) y demostremos (a). Sean ε y M como en la condición (b). Demostremos que X no es totalmente acotado. Razonando por reducción al absurdo supongamos que X es totalmente acotado. Entonces M es totalmente acotado. Sea A un subconjunto finito de M tal que para cada x en M se cumple $d(x, A) < \varepsilon$. Entonces $A = M$, pero esto contradice a la suposición que M es infinito. $\square$

2 Ejercicio. Denotamos por $C([0,1])$ el espacio de funciones continuas $[0,1] \to \mathbb{C}$, con la distancia

$$d(f,g) := \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(y)|.$$

En este espacio consideremos el conjunto

$$Y := \big\{ f \in C([0,1]) \colon \quad \forall x \in [0,1] \quad |f(x)| \leq 1 \big\}.$$

Determinar si Y es totalmente acotado.

Espacios métricos totalmente acotados y espacios métricos separables

3 Proposición. *Sea X un espacio métrico totalmente acotado. Entonces X es separable.*

Demostración. Para cada p en $\mathbb{N}$ encontramos un subconjunto finito A_p de X tal que para cada x en X se cumple $d(x, A_p) < 1/p$. Pongamos

$$D := \bigcup_{p=1}^{\infty} A_p.$$

Entonces D es finito o numerable por ser una unión numerable de conjuntos finitos. Mostremos que $\operatorname{cl}(D) = X$. Sea $x \in X$. Entonces para cada q en $\mathbb{N}$

$$d(x, D) \leq d(x, A_q) < \frac{1}{q},$$

luego $d(x, D) = 0$ y $x \in \operatorname{cl}(D)$. $\square$

4 Ejercicio. Dar un ejemplo de espacio métrico que sea separable, pero no sea totalmente acotado.

Espacios métricos totalmente acotados y sucesiones de Cauchy

5 Proposición (criterio de espacio métrico totalmente acotado en términos de sucesiones de Cauchy)**.** *Sea X un espacio métrico. Entonces X es totalmente acotado si, y solo si, cada sucesión en X contiene una subsucesión de Cauchy.*

Demostración. 1. Sea X totalmente acotado y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Encontramos una cubierta finita $\mathcal{C}_1$ de X tal que $\operatorname{diam}(A) < 1/2$ para cada A en $\mathcal{C}_1$. Entre los elementos de $\mathcal{C}_1$ elegimos A_1 tal que el conjunto $\{n \in \mathbb{N}\colon\ x_n \in A_1\}$ sea infinito. Elegimos $\nu(1)$ tal que $x_{\nu(1)} \in A_1$. Notamos que A_1 es un espacio totalmente acotado. Repetimos este proceso. En el k-ésimo paso encontramos una cubierta finita $\mathcal{C}_k$ del conjunto A_{k-1} tal que $\operatorname{diam}(A) < 1/2^k$ para cada A en $\mathcal{C}_k$. Entre los elementos de $\mathcal{C}_k$ elegimos A_k tal que el conjunto $\{n \in \mathbb{N}\colon\ x_n \in A_k\}$ sea infinito. Elegimos $\nu(k)$ tal que $\nu(k) > \nu(k-1)$ y $x_{\nu(k)} \in A_k$. La sucesión $(x_{\nu(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. En efecto, como $x_{\nu(k)}, x_{\nu(k+1)} \in A_k$, obtenemos $d(x_{\nu(k)}, x_{\nu(k+1)}) < 2^{-k}$.

2. Supongamos que X no es totalmente acotado. Entonces existen $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en X tal que para cada $j \neq k$ se cumple $d(a_j, a_k) \geq \varepsilon$. Entonces en la sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ no existe subsucesión de Cauchy. $\square$