

# Espacios métricos totalmente acotados

**Objetivos.** Empezar el estudio de espacios totalmente acotados.

**Prerrequisitos.** Espacio métrico, subespacio de un espacio métrico.

## Repaso de herramientas auxiliares

**1 Definición** (la distancia de un punto a un conjunto, repaso). Sean  $X$  un espacio métrico,  $A \subseteq X$ ,  $x \in X$ .

$$d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a).$$

**2 Definición** ( $\varepsilon$ -red). Sean  $X$  un espacio métrico,  $A \subseteq X$ ,  $\varepsilon > 0$ . Se dice que  $A$  es una  $\varepsilon$ -red en  $X$  si para cada  $x$  en  $X$  se cumple la desigualdad  $d(x, A) < \varepsilon$ .

La palabra “red” es sobrecargada en matemáticas, por eso su uso en este contexto no es muy recomendable.

**3 Definición** (el diámetro de un conjunto, repaso). Sea  $X$  un espacio métrico y sea  $A \subseteq X$ .

$$\text{diam}(A) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

**4 Ejemplo** (el diámetro de una bola abierta, repaso). Sean  $X$  un espacio métrico,  $a \in X$ ,  $r > 0$ . Entonces  $\text{diam}(B(a, r)) \leq 2r$ .

**5 Lema** (dos descripciones equivalentes de la  $\varepsilon$ -vecindad de un conjunto). Sean  $X$  un espacio métrico,  $A \subseteq X$ ,  $\varepsilon > 0$ . Entonces

$$\{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\} = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon).$$

*Demostración.* Sea  $x \in X$ . Aplicamos una propiedad del ínfimo y la definición de la bola abierta:

$$\begin{aligned} d(x, A) < \varepsilon & \iff \inf_{a \in A} d(x, a) < \varepsilon & \iff \exists a \in A \quad d(x, a) < \varepsilon \\ & \iff \exists a \in A \quad x \in B(a, \varepsilon) & \iff x \in \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon). \quad \square \end{aligned}$$

## Definición y criterio elemental de espacio métrico totalmente acotado

**6 Definición** (espacio métrico totalmente acotado). Sea  $X$  un espacio métrico. Se dice que  $X$  es *totalmente acotado* si para cada  $\varepsilon > 0$  existe un subconjunto finito  $A$  del espacio  $X$  tal que  $d(x, A) < \varepsilon$  para cada  $x$  en  $X$ .

**7 Proposición** (criterio elemental de espacio totalmente acotado). Sea  $X$  un espacio métrico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) para cada  $\varepsilon > 0$  existe un subconjunto finito  $A$  del espacio  $X$  tal que  $d(x, A) < \varepsilon$  para cada  $x$  en  $X$ ;

(b) para cada  $\varepsilon > 0$  existe un subconjunto finito  $A$  del espacio  $X$  tal que

$$X = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon);$$

(c) para cada  $\varepsilon > 0$  existe una colección finita  $\mathcal{C}$  de subconjuntos de  $X$  tal que  $\cup \mathcal{C} = X$  y para cada  $V$  en  $\mathcal{C}$  se cumple la desigualdad  $\text{diam}(V) < \varepsilon$ .

*Demostración.* Debido al Lema 5, las condiciones (a) y (b) son equivalentes.

Supongamos (b) y demostremos (c). Sea  $A$  un conjunto finito tal que  $X = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon/3)$ . Pongamos

$$\mathcal{C} := \{B(a, \varepsilon/3) : a \in A\}.$$

Entonces  $\mathcal{C}$  es finito y  $\cup \mathcal{C} = X$ . Además, si  $V \in \mathcal{C}$ , entonces existe  $a$  en  $A$  tal que  $V = B(a, \varepsilon/3)$ , luego  $\text{diam}(V) = \text{diam}(B(a, \varepsilon/3)) \leq 2\varepsilon/3 < \varepsilon$ .

Supongamos (c) y demostremos (b). Sea  $\varepsilon > 0$ . Usando la condición (c) encontramos una colección finita  $\mathcal{C}$  de subconjuntos de  $X$  tal que  $\cup \mathcal{C} = X$  y para cada  $V$  en  $\mathcal{C}$  se cumple la desigualdad  $\text{diam}(V) < \varepsilon$ .

Pongamos  $\mathcal{C}' := \mathcal{C} \setminus \{\emptyset\}$ . Entonces  $\cup \mathcal{C}' = \cup \mathcal{C} = X$ . En cada elemento  $V$  de la colección  $\mathcal{C}'$  elegimos un punto  $a$  y formamos de estos puntos elegidos el conjunto  $A$ . Entonces  $A$  es finito. Más aún, si  $V \in \mathcal{C}$  y  $a \in V$ , entonces para cada  $b$  en  $V$  se cumple  $d(a, b) \leq \text{diam}(V) < \varepsilon$ , así que  $b \in B(a, \varepsilon)$ . Esto significa que  $V \subseteq B(a, \varepsilon)$ . De aquí se sigue que

$$X = \cup \mathcal{C}' = \bigcup_{V \in \mathcal{C}'} V \subseteq \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon) \subseteq X,$$

es decir,  $\bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon) = X$ . □

**8 Proposición.** *Sea  $X$  un espacio métrico totalmente acotado. Entonces  $X$  es acotado.*

*Demostración.* Para  $\varepsilon = 1$  encontramos un subconjunto finito  $A$  de  $X$  tal que para cada  $x$  en  $X$  se cumple  $d(x, A) < 1$ . Pongamos

$$L := \max_{a,b \in A} d(a, b).$$

Entonces  $\text{diam}(X) \leq L + 2$ . En efecto, dados  $x, y$  en  $X$ , encontramos  $a, b$  en  $A$  tales que  $d(x, a) < 1$ ,  $d(y, b) < 1$ , y obtenemos

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \leq L + 2. \quad \square$$

## Subconjuntos totalmente acotados de espacios métricos

**9 Definición** (subconjunto totalmente acotado de un espacio métrico). Sea  $X$  un espacio métrico y sea  $Y \subseteq X$ . Se dice que  $Y$  es *totalmente acotado* si  $Y$  considerado como subespacio métrico de  $X$  es totalmente acotado.

**10 Proposición.** *Sea  $X$  un espacio métrico y sea  $Y \subseteq X$ . Entonces  $Y$  es totalmente acotado si, y sólo si, para cada  $\varepsilon > 0$  existe un subconjunto finito  $A$  del espacio  $X$  tal que  $d(x, A) < \varepsilon$  para cada  $x$  en  $Y$ .*

*Demostración.* La necesidad es obvia. Demostremos la suficiencia. Sea  $\varepsilon > 0$ . Encontramos en  $X$  una  $\varepsilon/2$ -red finita  $A$  para el conjunto  $Y$ , es decir, un conjunto finito  $A \subseteq X$  tal que para cada  $y$  en  $Y$  se cumple  $d(y, A) < \varepsilon/2$ . Luego para cada  $a$  en  $A$ , si  $d(a, Y) < \varepsilon/2$ , encontramos un punto  $b$  en  $Y$  tal que  $d(a, b) < \varepsilon/2$ . Denotemos por  $C$  al conjunto de estos puntos. Obviamente  $\#C \leq \#A$ . Demostremos que  $C$  es una  $\varepsilon$ -red para  $Y$ . Si  $x \in Y$ , entonces existe  $a$  en  $A$  tal que  $d(a, x) < \varepsilon/2$ . Luego  $d(a, Y) < \varepsilon/2$ , y existe  $b$  en  $C$  tal que  $d(a, b) < \varepsilon/2$ . Por la desigualdad del triángulo,  $d(x, b) < \varepsilon$ .  $\square$

**11 Proposición.** *Sea  $X$  un espacio métrico totalmente acotado y sea  $Y \subseteq X$ . Entonces  $Y$  es totalmente acotado.*

**12 Proposición.** *Sea  $Y \subseteq \mathbb{R}$ . Entonces  $Y$  es totalmente acotado si, y solo si,  $Y$  es acotado.*

*Demostración.* Supongamos que  $Y$  es acotado. Entonces existe  $L > 0$  tal que  $A \subseteq [-L, L]$ . Mostremos que  $Y$  es totalmente acotado. Sea  $\varepsilon > 0$ . Elegimos  $n$  de tal manera que

$L/n < \varepsilon$ . Definimos

$$A := \left\{ \frac{kL}{n} : -n \leq k \leq n \right\}.$$

Entonces  $\#A = 2n + 1$  y para cada  $x$  en  $Y$  se tiene que  $d(x, A) < L/n < \varepsilon$ .  $\square$

**13 Ejercicio.** Sea  $X$  un espacio métrico y sea  $Y \subseteq X$  tal que  $Y$  es totalmente acotado. Demostrar que  $\text{cl}(Y)$  es totalmente acotado.

**14 Proposición.** Sea  $X$  un espacio métrico totalmente acotado. Entonces  $X$  es separable.

*Demostración.* Para cada  $p$  en  $\mathbb{N}$  encontramos un subconjunto finito  $A_p$  de  $X$  tal que para cada  $x$  en  $X$  se cumple  $d(x, A_p) < 1/p$ . Pongamos

$$D := \bigcup_{p=1}^{\infty} A_p.$$

Entonces  $D$  es finito o numerable por ser una unión numerable de conjuntos finitos. Mostremos que  $\text{cl}(D) = X$ . Sea  $x \in X$ . Entonces para cada  $q$  en  $\mathbb{N}$

$$d(x, D) \leq d(x, A_q) < \frac{1}{q},$$

luego  $d(x, D) = 0$  y  $x \in \text{cl}(D)$ .  $\square$