

Espacios métricos totalmente acotados son separables

Objetivos. Mostrar que cada espacio métrico totalmente acotado es separable.

Prerrequisitos. Espacio métrico totalmente acotado; espacio topológico separable.

1 Observación (la topología inducida por una distancia, repaso). Dado un espacio métrico (X, d) , denotamos por τ_d la topología inducida por d .

2 Observación (la distancia de un punto a un conjunto, repaso). Recordemos que si (X, d) es un espacio métrico, $Y \subseteq X$ y $z \in X$, entonces

$$d(z, Y) := \inf_{y \in Y} d(z, y).$$

La definición se puede escribir también de la siguiente manera, en términos de la imagen del conjunto $\{z\} \times Y$ bajo la función d :

$$d(z, Y) = \inf(d[\{z\} \times Y]).$$

Las siguientes propiedades son fáciles de demostrar:

- si $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq X$, entonces $d(z, Y_1) \geq d(z, Y_2)$;
- $d(z, Y) = 0$ si, y sólo si, $z \in \text{cl}(Y)$.

3 Proposición. Si (X, d) es un espacio métrico totalmente acotado, entonces el espacio topológico (X, τ_d) es separable.

Demostración. Supongamos que (X, d) es totalmente acotado. Para cada p en $\mathbb{N}$, encontramos un subconjunto finito A_p de X tal que $V(A_p, 1/p) = X$. Pongamos

$$Y := \bigcup_{p=1}^{\infty} A_p.$$

Notamos que Y es finito o numerable por ser una unión numerable de conjuntos finitos. Mostremos que $\text{cl}(Y) = X$. Sea $x \in X$. Para cada q en $\mathbb{N}$,

$$d(x, Y) \leq d(x, A_q) < \frac{1}{q},$$

luego $d(x, Y) = 0$ y $x \in \text{cl}(Y)$. □

4 Ejercicio. Dar un ejemplo de espacio métrico que sea separable, pero no sea totalmente acotado.