# Topología inducida por una métrica

**Objetivos.** Definir la topología inducida por una métrica, verificar los axiomas de topología, demostrar la concordancia de algunos conceptos.

**Prerrequisitos.** Espacios métricos, bolas en espacios métricos. Pueden ayudar conocimientos básicos de la topología general.

## Bolas en un espacio métrico (repaso)

Recordemos tres proposiciones sobre bolas en espacios métricos. Se supone que $(X, d)$ es un espacio métrico.

**1 Proposición** (sobre una bola contenida en la otra)**.** *Sean $a, b \in X$ y sean $R, r > 0$. Complete el enunciado de la proposición:*

$$\textit{Si} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad , \quad \textit{entonces} \quad B(b, r) \subseteq B(a, R).$$

**2 Proposición** (sobre dos bolas ajenas)**.** *Sean $a_1, a_2 \in X$ y sean $r_1, r_2 > 0$. Complete el enunciado de la proposición:*

$$\textit{Si} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad , \quad \textit{entonces} \quad B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \varnothing.$$

**3 Proposición** (sobre la intersección de dos bolas concéntricas)**.** *Sea $a \in X$ y sean $r_1, r_2 > 0$. Complete el enunciado de la proposición:*

$$B(a, r_1) \cap B(a, r_2) =$$

**4 Proposición** (sobre el centro de la bola)**.** *Sean $a \in X$, $r > 0$. Entonces $a \in B(a, r)$.*

## Topología inducida por una métrica

**5 Definición** (los puntos interiores de un conjunto con respecto a una métrica)**.** Sea $(X, d)$ un espacio métrico y sea $A$ un subconjunto de $X$. Un punto $a \in X$ se llama *punto interior* de $A$ respecto a la métrica $d$ si existe un número $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq A$. Denotemos por $\operatorname{int}_d(A)$ al conjunto de los puntos interiores de $A$ respecto $d$. Formalmente,

$$\operatorname{int}_d(A) \coloneqq \{a \in X : \quad \exists r > 0 \quad B(a, r) \subseteq A\}.$$

**6 Proposición.** *Sea $(X,d)$ un espacio métrico y sea $A$ un subconjunto de $X$. Entonces $\operatorname{int}_d(A) \subseteq A$.*

*Demostración.* Se sigue de la Proposición 4. $\square$

**7 Definición** (conjunto abierto respecto a una métrica)**.** Sea $(X,d)$ un espacio métrico y sea $A \subseteq X$. Se dice que $A$ es *abierto* con respecto a la métrica $d$ si $A \subseteq \operatorname{int}_d(A)$, esto es, si todo punto del conjunto $A$ es su punto interior con respecto a la métrica $d$.

**8 Definición** (el conjunto de los conjuntos abiertos respecto una métrica)**.** Sea $(X,d)$ un espacio métrico. Denotemos por $\tau_d$ al conjunto de todos los conjuntos abiertos respecto a la métrica $d$:

$$\tau_d \coloneqq \big\{A \subseteq X\colon \ \operatorname{int}_d(A) = A\big\}.$$

En otras palabras,

$$\tau_d = \big\{A \subseteq X\colon \quad \forall a \in A \quad \exists r > 0 \quad B(a,r) \subseteq A\big\}.$$

**9 Proposición** (sobre la topología generada por una métrica)**.** *Sea $(X,d)$ un espacio métrico. Entonces el conjunto $\tau_d$ es una topología sobre $X$. Esto significa que se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Si $\mathcal{A} \subseteq \tau_d$, entonces $\cup\mathcal{A} \in \tau_d$.*

2. *Si $A_1, A_2 \in \tau_d$, entonces $A_1 \cap A_2 \in \tau_d$.*

3. *$X \in \tau_d$.*

*Demostración.* 1. Sea $\mathcal{A} \subseteq \tau_d$. Pongamos $V = \cup\mathcal{A}$. Probemos que $V \in \tau_d$. Sea $x \in V$. Entonces existe $A$ en $\mathcal{A}$ tal que $x \in A$. Como $A \in \tau_d$, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq A$. Luego $B(x,r) \subseteq V$.

2. Sean $A_1, A_2 \in \tau_d$. Pongamos $A_3 = A_1 \cap A_2$. Probemos que $A_3 \in \tau_d$. Sea $x \in A_3$. Como $x \in A_1$ y $A_1 \in \tau_d$, existe $r_1 > 0$ tal que $B(x,r_1) \subseteq A_1$. Como $x \in A_2$ y $A_2 \in \tau_d$, existe $r_2 > 0$ tal que $B(x,r_2) \subseteq A_2$. Pongamos $r_3 \coloneqq \min\{r_1, r_2\}$. Entonces $r_3 > 0$ y

$$B(x,r_3) \subseteq B(x,r_1) \cap B(x,r_2) \subseteq A_1 \cap A_2 = A_3.$$

3. Probemos que $X \in \tau_d$. Sea $x \in X$. Poniendo $r = 1$ obtenemos $B(x,r) \subseteq X$. Por supuesto, en vez de $r = 1$ podríamos usar cualquier número estrictamente positivo. $\square$

**10 Definición.** Sea $(X,d)$ un espacio métrico. La topología $\tau_d$ se llama la *topología inducida* (o *generada*) por la métrica $d$.

**11 Proposición** (las bolas abiertas realmente son abiertas). *Sea* $(X, d)$ *un espacio métrico y sean* $a \in X$, $r > 0$. *Entonces* $B(a, r) \in \tau_d$.

*Demostración.* Sea $x \in B(a, r)$. Pongamos $s \coloneqq r - d(a, x)$. Entonces $s > 0$ y $B(x, s) \subseteq B(a, r)$. Hemos probado que $B(a, r) \in \tau_d$. □