Topología inducida por una distancia (repaso)

Objetivos. Repasar las propiedades principales de bolas abiertas en un espacio métrico y recordar cómo se construye una topología a partir de una métrica.

Requisitos. Operaciones con conjuntos y sus propiedades, espacios métricos.

Espacios métricos (repaso)

1. Definición (distancia o métrica). Sea X un conjunto. Una función $d\colon X^2 \to [0, +\infty)$ se llama *distancia* o *métrica* sobre X si se cumplen las siguientes condiciones (*axiomas de métrica*):

1. *Desigualdad del triángulo*:
$$\forall a, b, c \in X \qquad d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b).$$
2. *Propiedad simétrica*:
$$\forall a, b \in X \qquad d(a, b) = d(b, a).$$
3. Para todo $a \in X$, $\quad d(a, a) = 0$.
4. Para todo $a, b \in X$, $\quad$ si $d(a, b) = 0$, entonces $a = b$.

2. Observación. A menudo en vez de las condiciones 3 y 4 se escribe una sola condición:
$$\forall a, b \in X \qquad d(a, b) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = b.$$

3. Definición (espacio métrico). Un par ordenado (X, d) se llama *espacio métrico* si X es un conjunto y $d\colon X^2 \to [0, +\infty)$ es una métrica sobre X.

4. Desigualdad inversa del triángulo. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $a, b, c \in X$. Entonces
$$\bigl|d(a, c) - d(b, c)\bigr| \leq d(a, b).$$

5. Ejemplo: distancia canónica en $\mathbb{R}$. Denotemos por $d\colon \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty)$ a la función
$$d(x, y) \coloneqq |x - y|.$$
Demuestre que d es una métrica en $\mathbb{R}$.

6. Distancia generada por una norma. Sea E un espacio vectorial y sea $\|\cdot\|$ una norma en E. Demuestre que la función $d(a, b) \coloneqq \|a - b\|$ es una métrica en E.

7. Normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{R}^n$ y las distancias correspondientes. Recuerde la definición de las normas $\|\cdot\|_p$ en $\mathbb{R}^n$. Los casos más importantes son $p = 1$, $p = 2$ y $p = +\infty$. Escriba en forma explícita fórmulas para las distancias d_p correspondientes.

Bolas en espacios métricos y sus propiedades principales (repaso)

8. Definición (bola en un espacio métrico). Sea (X, d) un espacio métrico, sea $a \in X$ y sea $r > 0$. Entonces el siguiente conjunto se llama *bola abierta* (o simplemente *bola*) con centro a y radio r:

$$B(a, r) \coloneqq \{x \in X \colon\ d(a, x) < r\}.$$

De manera similar, por medio de la condición $d(a, x) \leq r$, se definen *bolas cerradas*, pero nosotros vamos a repasar aquí solamente propiedades de las bolas abiertas.

9. Proposición sobre una bola contenida en la otra. Sea (X, d) un espacio métrico, sean $a, b \in X$ y sean $R, r > 0$ tales que $d(a, b) + r \leq R$. Entonces

$$B(b, r) \subset B(a, R).$$

10. Proposición sobre dos bolas ajenas. Sea (X, d) un espacio métrico, sean $a_1, a_2 \in X$ y sean $r_1, r_2 > 0$ tales que $r_1 + r_2 \leq d(a_1, a_2)$. Entonces

$$B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \varnothing.$$

11. Proposición sobre dos bolas concéntricas. Sea (X, d) un espacio métrico, sea $a \in X$ y sean $r_1, r_2 > 0$. Entonces

$$B(a, r_1) \cap B(a, r_2) = B(a, \min\{r_1, r_2\}).$$

Topología inducida por una métrica (repaso)

12. Definición (puntos interiores de un conjunto respecto a una métrica). Sea (X, d) un espacio métrico y sea A un subconjunto de X. Un punto $a \in A$ se llama *punto interior* de A con respecto a la métrica d si existe un número $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A$.

13. Notación (conjunto de los puntos interiores de un conjunto respecto a una métrica). Denotemos por $\operatorname{int}_d(A)$ al conjunto de los puntos interiores de A respecto a la métrica d:

$$\operatorname{int}_d(A) \coloneqq \big\{x \in X\colon \quad \exists r > 0 \quad B(a, r) \subset A\big\}.$$

Explique por qué $\operatorname{int}_d(A) \subset A$.

14. Definición (conjunto abierto respecto a una métrica). Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subset X$. Se dice que A es *abierto* con respecto a la métrica d si todo punto del conjunto A es su punto interior respecto a la métrica d.

15. Notación (conjunto de los conjuntos abiertos respecto a una métrica). Denotemos por τ_d al conjunto de todos los conjuntos abiertos respecto a la métrica d:

$$\tau_d \coloneqq \big\{A \subset X\colon\ \operatorname{int}_d(A) = A\big\}.$$

16. Teorema sobre la topología generada por una métrica. Sea X un conjunto y sea d un métrica sobre X. Entonces el conjunto τ_d de todos los subconjuntos de X abiertos con respecto a la métrica d es una topología sobre X. Esto significa que se cumplen las siguientes condiciones:

1. Si $(A_i)_{i \in J}$ es una familia de conjuntos pertenecientes a τ_d, entonces $\displaystyle\bigcup_{i \in J} A_i \in \tau_d$.

2. Si $A_1, A_2 \in \tau_d$, entonces $A_1 \cap A_2 \in \tau_d$.

3. $X \in \tau_d$.

Esta topología se llama *topología inducida* (o *generada*) por la métrica d.

Concordancia de los conceptos: puntos interiores, bolas abiertas

En cualquier espacio topológico existen conceptos de *puntos interiores* y *conjuntos abiertos*. Mostremos el concepto del *punto interior* de un conjunto respecto a una métrica coincide con el concepto del *punto interior* respecto a la topología inducida. Además mostremos que las "bolas abiertas" son conjuntos abiertos en la topología inducida por la métrica.

17. Proposición (sobre los puntos interiores). Sea (X, d) un espacio métrico, sea $Y \subset X$ y sea $x \in Y$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) x es un punto interior de Y respecto a la métrica d, es decir existe un radio $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset Y$.

(b) x es un punto interior de Y respecto a la topología τ_d, es decir existe un conjunto $A \in \tau_d$ tal que $x \in A$ y $A \subset Y$.

18. Proposición (bolas abiertas son abiertas en la topología inducida). Sean (X, d) un espacio métrico, $a \in X$ y $r > 0$. Entonces la bola $B(a, r)$ es un conjunto abierto respecto a la métrica d, es decir $B(a, r) \in \tau_d$.