Topología inducida por una distancia
(un tema de análisis)

Egor Maximenko,
http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

4 de febrero de 2022

Objetivo.

Dado un espacio métrico, definir en este espacio una topología a partir de la distancia.

Objetivo.

Dado un espacio métrico, definir en este espacio una topología a partir de la distancia.

Prerrequisitos.

Propiedades de bolas en espacios métricos.

Notación para bolas en espacios métricos

Suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

Notación para bolas en espacios métricos

Suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

Sean $a \in X$, $r > 0$.

$$B(a, r) \coloneqq \{x \in X \colon\ d(x, a) < r\}.$$

Propiedades de bolas en espacios métricos (repaso)

Proposición (sobre el centro de la bola)

Sean $a \in X$, $r > 0$. Entonces

$$a \in B(a, r).$$

Propiedades de bolas en espacios métricos (repaso)

Proposición (sobre bolas concéntricas)

Sean $a \in X$, $r_1, r_2 > 0$, $r_1 < r_2$. Entonces

$$B(a, r_1) \subseteq B(a, r_2).$$

Propiedades de bolas en espacios métricos (repaso)

Proposición (sobre bolas disjuntas)

Sean $a_1, a_2 \in X$, $r_1, r_2 > 0$ tales que $d(a_1, a_2) \geq r_1 + r_2$. Entonces

$$B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \emptyset.$$

Contención de bolas

Proposición (sobre una bola contenida en otra)

Sean $a_1, a_2 \in X$, $r_1, r_2 > 0$ tales que $d(a_1, a_2) + r_2 \leq r_1$. Entonces

$$B(a_2, r_2) \subseteq B(a_1, r_1).$$

Contención de bolas

Proposición (sobre una bola contenida en otra)

Sean $a_1, a_2 \in X$, $r_1, r_2 > 0$ tales que $d(a_1, a_2) + r_2 \leq r_1$. Entonces

$$B(a_2, r_2) \subseteq B(a_1, r_1).$$

Corolario

Sean $a_1 \in X$, $r_1 > 0$, $a_2 \in B(a_1, r_1)$, $r_2 = r_1 - d(a_1, a_2)$. Entonces

$$B(a_2, r_2) \subseteq B(a_1, r_1).$$

Definición de topología (repaso)

Sean X un conjunto y τ una colección de subconjuntos de X:

$$\tau \subseteq 2^X.$$

Se dice que τ es una topología en X si se cumplen las siguientes propiedades:

- Para cada familia $(V_k)_{k\in J}$ con valores en τ,

$$\bigcup_{k\in J} V_k \in \tau.$$

- Para cada V_1, V_2 en τ,

$$V_1 \cap V_2 \in \tau.$$

- $X \in \tau$.

Definición del interior de un conjunto respecto a una distancia

Definición

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$.

Definimos el interior de A respecto a d como

$$\operatorname{int}_d(A) := \Big\{x \in A\colon \quad \exists r > 0 \quad B(x, r) \subseteq A\Big\}.$$

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$. Entonces

$$\operatorname{int}_d(A) \subseteq A.$$

Definición de los conjuntos abiertos respecto a una distancia

Definición

Sea (X, d) un espacio métrico. Definimos la colección de los conjuntos abiertos respecto a d de la siguiente manera:

$$\tau_d := \Big\{ A \subseteq X : \quad A = \operatorname{int}_d(A) \Big\}.$$

Definición de los conjuntos abiertos respecto a una distancia

Definición

Sea (X, d) un espacio métrico. Definimos la colección de los conjuntos abiertos respecto a d de la siguiente manera:

$$\tau_d := \Big\{A \subseteq X : \quad A = \operatorname{int}_d(A)\Big\}.$$

Ya sabemos que $\operatorname{int}_d(A) \subseteq A$ para cada A. Por eso

$$\tau_d = \Big\{A \subseteq X : \quad A \subseteq \operatorname{int}_d(A)\Big\}.$$

Definición de los conjuntos abiertos respecto a una distancia

Definición

Sea (X, d) un espacio métrico. Definimos la colección de los conjuntos abiertos respecto a d de la siguiente manera:

$$\tau_d := \Big\{ A \subseteq X : \quad A = \operatorname{int}_d(A) \Big\}.$$

Ya sabemos que $\operatorname{int}_d(A) \subseteq A$ para cada A. Por eso

$$\tau_d = \Big\{ A \subseteq X : \quad A \subseteq \operatorname{int}_d(A) \Big\}.$$

Sustituimos la definición de $\operatorname{int}_d(A)$ y obtenemos lo siguiente:

$$\tau_d = \Big\{ A \subseteq X : \quad \forall x \in A \quad \exists r > 0 \quad B(x, r) \subseteq A \Big\}.$$

La topología inducida por una distancia

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces τ_d es una topología.

Demostración: la colección τ_d es cerrada bajo las uniones

Sea $(A_k)_{k\in J}$ una familia con valores en τ_d. Pongamos

$$V := \bigcup_{k\in J} A_k.$$

Demostración: la colección τ_d es cerrada bajo las uniones

Sea $(A_k)_{k\in J}$ una familia con valores en τ_d. Pongamos

$$V := \bigcup_{k\in J} A_k.$$

Sea $x \in V$.

Demostración: la colección τ_d es cerrada bajo las uniones

Sea $(A_k)_{k\in J}$ una familia con valores en τ_d. Pongamos

$$V := \bigcup_{k\in J} A_k.$$

Sea $x \in V$. Encontramos m en J tal que $x \in A_m$.

Demostración: la colección τ_d es cerrada bajo las uniones

Sea $(A_k)_{k\in J}$ una familia con valores en τ_d. Pongamos

$$V := \bigcup_{k\in J} A_k.$$

Sea $x \in V$. Encontramos m en J tal que $x \in A_m$.

Como $x \in A_m$ y $A_m \in \tau_d$, encontramos $r > 0$ tal que

$$B(x, r) \subseteq A_m.$$

Demostración: la colección τ_d es cerrada bajo las uniones

Sea $(A_k)_{k\in J}$ una familia con valores en τ_d. Pongamos

$$V := \bigcup_{k\in J} A_k.$$

Sea $x \in V$. Encontramos m en J tal que $x \in A_m$.

Como $x \in A_m$ y $A_m \in \tau_d$, encontramos $r > 0$ tal que

$$B(x, r) \subseteq A_m.$$

Entonces $B(x, r) \subseteq V$.

Demostración: la colección τ_d es cerrada bajo la operación de intersección de dos conjuntos

Sean $A_1, A_2 \in \tau_d$.

Demostración: la colección τ_d es cerrada bajo la operación de intersección de dos conjuntos

Sean $A_1, A_2 \in \tau_d$. Sea $x \in A_1 \cap A_2$.

Demostración: la colección τ_d es cerrada bajo la operación de intersección de dos conjuntos

Sean $A_1, A_2 \in \tau_d$. Sea $x \in A_1 \cap A_2$.

Como $x \in A_1$ y $A_1 \in \tau_d$, encontramos $r_1 > 0$ tal que $B(x, r_1) \subseteq A_1$.

Demostración: la colección τ_d es cerrada bajo la operación de intersección de dos conjuntos

Sean $A_1, A_2 \in \tau_d$. Sea $x \in A_1 \cap A_2$.

Como $x \in A_1$ y $A_1 \in \tau_d$, encontramos $r_1 > 0$ tal que $B(x, r_1) \subseteq A_1$.

Como $x \in A_2$ y $A_2 \in \tau_d$, encontramos $r_2 > 0$ tal que $B(x, r_2) \subseteq A_2$.

Demostración: la colección τ_d es cerrada bajo la operación de intersección de dos conjuntos

Sean $A_1, A_2 \in \tau_d$.   Sea $x \in A_1 \cap A_2$.

Como $x \in A_1$ y $A_1 \in \tau_d$, encontramos $r_1 > 0$ tal que $B(x, r_1) \subseteq A_1$.

Como $x \in A_2$ y $A_2 \in \tau_d$, encontramos $r_2 > 0$ tal que $B(x, r_2) \subseteq A_2$.

Pongamos $r_3 :=$

Demostración: la colección τ_d es cerrada bajo la operación de intersección de dos conjuntos

Sean $A_1, A_2 \in \tau_d$. Sea $x \in A_1 \cap A_2$.

Como $x \in A_1$ y $A_1 \in \tau_d$, encontramos $r_1 > 0$ tal que $B(x, r_1) \subseteq A_1$.

Como $x \in A_2$ y $A_2 \in \tau_d$, encontramos $r_2 > 0$ tal que $B(x, r_2) \subseteq A_2$.

Pongamos $r_3 := \min\{r_1, r_2\}$. Entonces

$$B(x, r_3) =$$

Demostración: la colección τ_d es cerrada bajo la operación de intersección de dos conjuntos

Sean $A_1, A_2 \in \tau_d$. Sea $x \in A_1 \cap A_2$.

Como $x \in A_1$ y $A_1 \in \tau_d$, encontramos $r_1 > 0$ tal que $B(x, r_1) \subseteq A_1$.

Como $x \in A_2$ y $A_2 \in \tau_d$, encontramos $r_2 > 0$ tal que $B(x, r_2) \subseteq A_2$.

Pongamos $r_3 := \min\{r_1, r_2\}$. Entonces

$$B(x, r_3) = B(x, r_1) \cap B(x, r_2) \subseteq$$

Demostración: la colección τ_d es cerrada bajo la operación de intersección de dos conjuntos

Sean $A_1, A_2 \in \tau_d$. Sea $x \in A_1 \cap A_2$.

Como $x \in A_1$ y $A_1 \in \tau_d$, encontramos $r_1 > 0$ tal que $B(x, r_1) \subseteq A_1$.

Como $x \in A_2$ y $A_2 \in \tau_d$, encontramos $r_2 > 0$ tal que $B(x, r_2) \subseteq A_2$.

Pongamos $r_3 := \min\{r_1, r_2\}$. Entonces

$$B(x, r_3) = B(x, r_1) \cap B(x, r_2) \subseteq A_1 \cap A_2.$$

Demostración: $X \in \tau_d$

Mostremos que $X \in \tau_d$.

Demostración: $X \in \tau_d$

Mostremos que $X \in \tau_d$.

Sea $x \in X$. Entonces $B(x, 1) \subseteq X$.

Demostración: $X \in \tau_d$

Mostremos que $X \in \tau_d$.

Sea $x \in X$. Entonces $B(x, 1) \subseteq X$.

(Por supuesto, en vez de 1 sirve cualquier otro número positivo.
Yo sugiero dar un valor específico cuando demostramos la existencia.)

Las bolas abiertas son abiertas

En lo que sigue, suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

Las bolas abiertas son abiertas

En lo que sigue, suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

Ejercicio. Sean $a \in X$, $r > 0$. Demostrar

$$B(a, r) \in \tau_d.$$

El interior de un conjunto

Recordemos la definición del interior de un conjunto respecto a una topología:

$$\mathrm{int}_\tau(A) \;:=$$

El interior de un conjunto

Recordemos la definición del interior de un conjunto respecto a una topología:

$$\operatorname{int}_\tau(A) \;:=\; \Big\{x \in X : \quad \exists V \in \tau \quad x \in V \quad \wedge \quad V \subseteq A\Big\}.$$

El interior de un conjunto

Recordemos la definición del interior de un conjunto respecto a una topología:

$$\operatorname{int}_\tau(A) \;:=\; \Big\{ x \in X : \quad \exists V \in \tau \quad x \in V \quad \wedge \quad V \subseteq A \Big\}.$$

Ejercicio. Sea $A \subseteq X$. Demostrar que

$$\operatorname{int}_{\tau_d}(A) = \operatorname{int}_d(A).$$

Conjuntos cerrados

Definición (la cerradura de un conjunto respecto a una distancia)

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$.

$$\operatorname{clos}_d(Y) \;:=\; \Big\{ x \in X : \quad \forall r > 0 \quad Y \cap B(x, r) \neq \emptyset \Big\}.$$

Conjuntos cerrados

Definición (la cerradura de un conjunto respecto a una distancia)

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$.

$$\operatorname{clos}_d(Y) \ := \ \left\{ x \in X \colon \quad \forall r > 0 \quad Y \cap B(x, r) \neq \emptyset \right\}.$$

Ejercicio. Sea $Y \subseteq X$. Demostrar que

$$X \setminus Y \in \tau_d \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{clos}_d(Y) = Y.$$

La topología inducida por una distancia es de Hausdorff

Ejercicio. Sean $a_1, a_2 \in X$. Demostrar que existen $V_1, V_2 \in \tau_d$ tales que

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset.$$

Sugerencia: encontrar $r_1 > 0$ y $r_2 > 0$ tales que

$$B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \emptyset.$$