

Bases de topologías (un tema de análisis)

Egor Maximenko,
<http://www.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

11 de febrero de 2022

Objetivos.

- Conocer el concepto de una base de una topología dada.
- Conocer el concepto de una “topobase”.
- Mostrar que una topobase define una topología.

Prerrequisitos.

- Operaciones con familias de conjuntos.
- La unión de una colección de conjuntos.
- Topologías y espacios topológicos.

La unión de una colección de conjuntos (repass)

Definición

Sea X un conjunto y sea $\gamma \subseteq 2^X$. El conjunto $\cup\gamma$ se define como

$$\cup\gamma := \{x \in X : \exists B \in \gamma \quad x \in B\}.$$

Definición de topología (repass)

Definición

Sea X un conjunto y sea $\tau \subseteq 2^X$.

Se dice que τ es una topología en X , si se cumplen las siguientes propiedades.

1. $\forall \xi \subseteq \tau \quad \cup \xi \in \tau$.
2. $\forall A, B \in \tau \quad A \cap B \in \tau$.
3. $X \in \tau$.

Una base de una topología dada

Definición

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\beta \subseteq 2^X$. Se dice que β es una base de τ si

$$\tau = \{A \subseteq X : \exists \gamma \subseteq \beta \quad A = \cup \gamma\}.$$

Una base de una topología dada

Definición

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\beta \subseteq 2^X$. Se dice que β es una **base de τ** si

$$\tau = \{A \subseteq X: \exists \gamma \subseteq \beta \quad A = \cup \gamma\}.$$

Ejercicio. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea β una base de τ .

Demostrar que $\beta \subseteq \tau$.

Una base de una topología dada

Definición

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\beta \subseteq 2^X$. Se dice que β es una base de τ si

$$\tau = \{A \subseteq X: \exists \gamma \subseteq \beta \quad A = \cup \gamma\}.$$

Ejercicio. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea β una base de τ .
Demostrar que $\beta \subseteq \tau$.

Ejercicio. Sean τ_1, τ_2 topologías en X y sea $\beta \subseteq 2^X$ tal que β es una base de τ_1 y β es una base de τ_2 . Mostrar que $\tau_1 = \tau_2$.

Descripción local de los conjuntos abiertos a partir de una base

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\beta \subseteq 2^X$. Entonces

$$\begin{aligned} \{A \subseteq X: \exists \gamma \subseteq \beta \quad A = \cup \gamma\} \\ = \{A \subseteq X: \forall x \in A \quad \exists B \in \beta \quad (x \in B) \quad \wedge \quad (B \subseteq A)\}. \end{aligned}$$

Descripción local de los conjuntos abiertos a partir de una base

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\beta \subseteq 2^X$. Entonces

$$\begin{aligned} \{A \subseteq X: \exists \gamma \subseteq \beta \quad A = \cup \gamma\} \\ = \{A \subseteq X: \forall x \in A \quad \exists B \in \beta \quad (x \in B) \quad \wedge \quad (B \subseteq A)\}. \end{aligned}$$

Demostración de \subseteq : ejercicio simple.

Descripción local de los conjuntos abiertos a partir de una base

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\beta \subseteq 2^X$. Entonces

$$\begin{aligned} \{A \subseteq X: \exists \gamma \subseteq \beta \quad A = \cup \gamma\} \\ = \{A \subseteq X: \forall x \in A \quad \exists B \in \beta \quad (x \in B) \quad \wedge \quad (B \subseteq A)\}. \end{aligned}$$

Demostración de \subseteq : ejercicio simple.

Demostración de \supseteq : por el axioma de elección, existe $f: A \rightarrow 2^X$ tal que

$$\forall x \in A \quad (x \in f(x)) \quad \wedge \quad (f(x) \subseteq A).$$

Poner $\gamma := f[A]$ y mostrar que $A = \cup \gamma$.

Propiedades de una base de una topología dada

Proposición

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea β una base de τ .

Entonces β tiene las siguientes propiedades.

1. $\cup\beta = X$.
2. $\forall A_1, A_2 \in \beta \quad \forall x \in A_1 \cap A_2 \quad \exists A_3 \in \beta \quad (x \in A_3 \wedge A_3 \subseteq A_1 \cap A_2)$.

Demostración de la primera propiedad de β

Como $X \in \tau$,

Demostración de la primera propiedad de β

Como $X \in \tau$, existe $\gamma \subseteq \beta$ tal que

Demostración de la primera propiedad de β

Como $X \in \tau$, existe $\gamma \subseteq \beta$ tal que

$$X = \cup \gamma.$$

Demostración de la primera propiedad de β

Como $X \in \tau$, existe $\gamma \subseteq \beta$ tal que

$$X = \bigcup \gamma.$$

Por la propiedad creciente de la unión de colecciones de conjuntos,

Demostración de la primera propiedad de β

Como $X \in \tau$, existe $\gamma \subseteq \beta$ tal que

$$X = \cup \gamma.$$

Por la propiedad creciente de la unión de colecciones de conjuntos,

$$\cup \gamma \subseteq \cup \beta.$$

Demostración de la primera propiedad de β

Como $X \in \tau$, existe $\gamma \subseteq \beta$ tal que

$$X = \cup \gamma.$$

Por la propiedad creciente de la unión de colecciones de conjuntos,

$$\cup \gamma \subseteq \cup \beta.$$

Hemos obtenido la siguiente cadena:

$$X = \cup \gamma \subseteq \cup \beta \subseteq X.$$

Demostración de la segunda propiedad de β

Sean $A_1, A_2 \in \beta$, $x \in A_1 \cap A_2$.

Demostración de la segunda propiedad de β

Sean $A_1, A_2 \in \beta$, $x \in A_1 \cap A_2$.

Como $A_1, A_2 \in \tau$ y τ es cerrada bajo las intersecciones finitas,

Demostración de la segunda propiedad de β

Sean $A_1, A_2 \in \beta$, $x \in A_1 \cap A_2$.

Como $A_1, A_2 \in \tau$ y τ es cerrada bajo las intersecciones finitas,

$$A_1 \cap A_2 \in \tau.$$

Demostración de la segunda propiedad de β

Sean $A_1, A_2 \in \beta$, $x \in A_1 \cap A_2$.

Como $A_1, A_2 \in \tau$ y τ es cerrada bajo las intersecciones finitas,

$$A_1 \cap A_2 \in \tau.$$

Como β es una base de τ ,

Demostración de la segunda propiedad de β

Sean $A_1, A_2 \in \beta$, $x \in A_1 \cap A_2$.

Como $A_1, A_2 \in \tau$ y τ es cerrada bajo las intersecciones finitas,

$$A_1 \cap A_2 \in \tau.$$

Como β es una base de τ , existe $\gamma \subseteq \beta$ tal que $A_1 \cap A_2 = \cup \gamma$.

Demostración de la segunda propiedad de β

Sean $A_1, A_2 \in \beta$, $x \in A_1 \cap A_2$.

Como $A_1, A_2 \in \tau$ y τ es cerrada bajo las intersecciones finitas,

$$A_1 \cap A_2 \in \tau.$$

Como β es una base de τ , existe $\gamma \subseteq \beta$ tal que $A_1 \cap A_2 = \cup \gamma$.

Finalmente, como $x \in A_1 \cap A_2$,

Demostración de la segunda propiedad de β

Sean $A_1, A_2 \in \beta$, $x \in A_1 \cap A_2$.

Como $A_1, A_2 \in \tau$ y τ es cerrada bajo las intersecciones finitas,

$$A_1 \cap A_2 \in \tau.$$

Como β es una base de τ , existe $\gamma \subseteq \beta$ tal que $A_1 \cap A_2 = \cup \gamma$.

Finalmente, como $x \in A_1 \cap A_2$, existe A_3 en γ tal que $x \in A_3$.

Una base de topología (“topobase”)

Definición

Sea X un conjunto y sea $\beta \subseteq 2^X$.

Decimos que β es una **topobase**, si β tiene las siguientes propiedades.

1. $\cup\beta = X$.

2. $\forall A_1, A_2 \in \beta \quad \forall x \in A_1 \cap A_2 \quad \exists A_3 \in \beta \quad (x \in A_3 \wedge A_3 \subseteq A_1 \cap A_2)$.

Una base de topología (“topobase”)

Definición

Sea X un conjunto y sea $\beta \subseteq 2^X$.

Decimos que β es una **topobase**, si β tiene las siguientes propiedades.

1. $\cup\beta = X$.

2. $\forall A_1, A_2 \in \beta \quad \forall x \in A_1 \cap A_2 \quad \exists A_3 \in \beta \quad (x \in A_3 \wedge A_3 \subseteq A_1 \cap A_2)$.

Observación. En esta definición no está dada ninguna topología.

La topología generada por una topobase

Proposición

Sea X un conjunto y sea $\beta \subseteq 2^X$. Supongamos que β es una topobase.

Definimos τ de la siguiente manera:

$$\tau := \{A \subseteq 2^X : \exists \gamma \subseteq \beta \quad A = \cup \gamma\}.$$

Entonces τ es una topología y β es una base de τ .

Primera demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup \xi.$$

Primera demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup \xi.$$

Tenemos por demostrar que

Primera demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup \xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$.

Primera demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup \xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$. Pongamos

$$\gamma :=$$

Primera demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup \xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$. Pongamos

$$\gamma := \{B \in \beta : B \subseteq A\}.$$

Primera demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup \xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$. Pongamos

$$\gamma := \{B \in \beta : B \subseteq A\}.$$

Queremos mostrar que

Primera demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup \xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$. Pongamos

$$\gamma := \{B \in \beta : B \subseteq A\}.$$

Queremos mostrar que $A = \cup \gamma$.

Primera demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup \xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$. Pongamos

$$\gamma := \{B \in \beta : B \subseteq A\}.$$

Queremos mostrar que $A = \cup \gamma$. Obviamente, $\cup \gamma \subseteq A$.

Primera demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup \xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$. Pongamos

$$\gamma := \{B \in \beta : B \subseteq A\}.$$

Queremos mostrar que $A = \cup \gamma$. Obviamente, $\cup \gamma \subseteq A$.

Por otro lado, sea $x \in A$.

Primera demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup \xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$. Pongamos

$$\gamma := \{B \in \beta : B \subseteq A\}.$$

Queremos mostrar que $A = \cup \gamma$. Obviamente, $\cup \gamma \subseteq A$.

Por otro lado, sea $x \in A$. Encontramos C en ξ tal que $x \in C$.

Primera demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup \xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$. Pongamos

$$\gamma := \{B \in \beta : B \subseteq A\}.$$

Queremos mostrar que $A = \cup \gamma$. Obviamente, $\cup \gamma \subseteq A$.

Por otro lado, sea $x \in A$. Encontramos $C \in \xi$ tal que $x \in C$.

Como $C \in \tau$, encontramos $\eta \subseteq \beta$ tal que $C = \cup \eta$.

Primera demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup \xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$. Pongamos

$$\gamma := \{B \in \beta : B \subseteq A\}.$$

Queremos mostrar que $A = \cup \gamma$. Obviamente, $\cup \gamma \subseteq A$.

Por otro lado, sea $x \in A$. Encontramos $C \in \xi$ tal que $x \in C$.

Como $C \in \tau$, encontramos $\eta \subseteq \beta$ tal que $C = \cup \eta$.

Como $x \in C$, encontramos $B \in \eta$ tal que $x \in B$.

Primera demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup \xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$. Pongamos

$$\gamma := \{B \in \beta : B \subseteq A\}.$$

Queremos mostrar que $A = \cup \gamma$. Obviamente, $\cup \gamma \subseteq A$.

Por otro lado, sea $x \in A$. Encontramos $C \in \xi$ tal que $x \in C$.

Como $C \in \tau$, encontramos $\eta \subseteq \beta$ tal que $C = \cup \eta$.

Como $x \in C$, encontramos $B \in \eta$ tal que $x \in B$.

Notamos que $B \in \beta$ y $B \subseteq C \subseteq A$.

Primera demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup \xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$. Pongamos

$$\gamma := \{B \in \beta : B \subseteq A\}.$$

Queremos mostrar que $A = \cup \gamma$. Obviamente, $\cup \gamma \subseteq A$.

Por otro lado, sea $x \in A$. Encontramos $C \in \xi$ tal que $x \in C$.

Como $C \in \tau$, encontramos $\eta \subseteq \beta$ tal que $C = \cup \eta$.

Como $x \in C$, encontramos $B \in \eta$ tal que $x \in B$.

Notamos que $B \in \beta$ y $B \subseteq C \subseteq A$. Luego $B \in \gamma$.

Primera demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup \xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$. Pongamos

$$\gamma := \{B \in \beta : B \subseteq A\}.$$

Queremos mostrar que $A = \cup \gamma$. Obviamente, $\cup \gamma \subseteq A$.

Por otro lado, sea $x \in A$. Encontramos $C \in \xi$ tal que $x \in C$.

Como $C \in \tau$, encontramos $\eta \subseteq \beta$ tal que $C = \cup \eta$.

Como $x \in C$, encontramos $B \in \eta$ tal que $x \in B$.

Notamos que $B \in \beta$ y $B \subseteq C \subseteq A$. Luego $B \in \gamma$. Hemos mostrado que $x \in \cup \gamma$.

Segunda demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup \xi.$$

Segunda demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup \xi.$$

Tenemos por demostrar que

Segunda demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup \xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$.

Segunda demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup \xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$.

Usemos la descripción local de los elementos de τ .

Segunda demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup \xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$.

Usemos la descripción local de los elementos de τ .

Sea $x \in A$. Entonces existe P en ξ tal que $x \in P$.

Segunda demostración que τ es cerrada bajo las uniones

Sea $\xi \subseteq \tau$ y sea

$$A := \cup \xi.$$

Tenemos por demostrar que $A \in \tau$.

Usemos la descripción local de los elementos de τ .

Sea $x \in A$. Entonces existe P en ξ tal que $x \in P$.

Como $x \in P$ y $P \in \tau$, existe B en β tal que

$$x \in B, \quad B \subseteq P.$$

Luego $B \subseteq P \subseteq A$.

Ejercicio. Completar la demostración que τ es una topología.

Demostrar que τ es cerrada bajo la intersección (de dos conjuntos) y que $X \in \tau$.

Las bolas abiertas en un espacio métrico forman una topobase

Ejercicio. Sea (X, d) un espacio métrico. Pongamos

$$\beta := \{B(a, r) : a \in X, r > 0\}.$$

Demostrar que β es una topobase.