El espacio vectorial de las sucesiones complejas

Objetivos. Definir el espacio vectorial $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de las sucesiones complejas.

De acuerdo con la notación usual de la teoría de conjuntos, denotamos por $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ al conjunto de todas las funciones $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

Las operaciones lineales en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ se definen por componentes.

1 Definición (operaciones lineales en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$)**.** Dadas a, b en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,

$$a + b \coloneqq \big(a_k + b_k\big)_{k\in\mathbb{N}}.$$

En otras palabras, $a + b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad (a + b)_k = a_k + b_k.$$

Dadas λ en $\mathbb{C}$ y a en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,

$$\lambda a \coloneqq \big(\lambda a_k\big)_{k\in\mathbb{N}}.$$

En otras palabras, $\lambda a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad (\lambda a)_k = \lambda a_k.$$

2 Proposición. *$\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ es un espacio vectorial.*

Demostración. De los 8 axiomas del espacio vectorial verifiquemos solamente dos.

La existencia del elemento neutro. Denotemos por $0_{\mathbb{N}}$ la sucesión nula:

$$0_{\mathbb{N}} \coloneqq \big(0\big)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Esta sucesión es un elemento neutro bajo la adición en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. En efecto, sea $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Notamos que $a + 0_{\mathbb{N}}$ y a ambas son sucesiones de clase $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Probemos que estas dos sucesiones son iguales por componentes. Para cada k en $\mathbb{N}$,

$$(a + 0_{\mathbb{N}})_k = a_k + (0_{\mathbb{N}})_k = a_k + 0 = a_k.$$

Hemos usado la definición de la adición en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, la definición de la sucesión $0_{\mathbb{N}}$ y la propiedad neutra del número 0. De manera similar se muestra que $0_{\mathbb{N}} + a = a$.

Probemos la propiedad distributiva de la multiplicación por escalares respecto a la adición de escalares. Sean $\xi, \eta \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Entonces es fácil ver que $(\xi + \eta)a$ y $\xi a + \eta a$ ambas son elementos de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, y para cada k en $\mathbb{N}$

$$\big((\xi + \eta)a\big)_k = (\xi + \eta)a_k = \xi a_k + \eta ak = (\xi a)_k + (\eta a)_k = \big((\xi a) + (\eta a)\big)_k.$$

Hemos usado la definición de las operaciones lineales en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y la propiedad distributiva en $\mathbb{C}$. □

3 Observación. En $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ se puede definir la multiplicación de elementos, componente a componente:

$$ab := \big(a_k b_k\big)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Esta operación es asociativa y conmutativa. Denotemos por $1_{\mathbb{N}}$ a la sucesión constante uno:

$$1_{\mathbb{N}} := \big(1\big)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Esta sucesión es un elemento neutro bajo la multiplicación. Por lo tanto, $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ es un álgebra compleja asociativa y conmutativa con identidad.

4 Observación. A continuación vamos a definir varios espacios de sucesiones:

- c_{fin}, el espacio de las sucesiones de soporte finito (sucesiones que eventualmente son cero);
- ℓ^∞, el espacio de las sucesiones acotadas;
- ℓ^p con $1 \le p < +\infty$, el espacio de las sucesiones p-sumables;
- c, el espacio de las sucesiones convergentes;
- c_0, el espacio de las sucesiones convergentes al cero.

Todos estos espacios son subespacios vectoriales de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Notemos que no es necesario verificar los axiomas de espacio vectorial para cada uno de estos espacios de sucesiones; es suficiente verificar que es cerrado bajo las operaciones lineales y contiene a la sucesión nula $0_{\mathbb{N}}$.