El espacio vectorial de las funciones complejas

Objetivos. Dado un conjunto X, definir el espacio vectorial $\mathbb{C}^X$ de las funciones complejas.

En este tema suponemos que X es un conjunto. De acuerdo con la notación usual de la teoría de conjuntos, denotamos por $\mathbb{C}^X$ al conjunto de todas las funciones $X \to \mathbb{C}$.

Las operaciones lineales en $\mathbb{C}^X$ se definen por componentes.

1 Definición (operaciones lineales en $\mathbb{C}^X$)**.** Dadas $f, g\colon X \to \mathbb{C}$, sea define $f+g\colon X \to \mathbb{C}$,

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \qquad (x \in X).$$

Dadas λ en $\mathbb{C}$ y $f\colon X \to \mathbb{C}$,

$$(\lambda f)(x) := \lambda\, f(x) \qquad (x \in X).$$

2 Proposición. $\mathbb{C}^X$ *es un espacio vectorial.*

Demostración. De los 8 axiomas del espacio vectorial verifiquemos solamente dos.

La existencia del elemento neutro. La función constante nula $0_X\colon X \to \mathbb{C}$, definida mediante la regla

$$0_X(x) := 0 \qquad (x \in X),$$

es un elemento neutro bajo la adición en $\mathbb{C}^X$. En efecto, dada f en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,

$$(f + 0_X)(x) = f(x) + 0_X(x) = f(x) + 0 = f(x).$$

Hemos usado la definición de la adición en $\mathbb{C}^X$, la definición de la función 0_X y la propiedad neutra del número 0. De manera similar se muestra que $0_X + f = f$.

La propiedad distributiva de la multiplicación por escalares respecto a la adición de escalares. Sean $\xi, \eta \in \mathbb{C}$, $f \in \mathbb{C}^X$. Entonces es fácil ver que $(\xi+\eta)f$ y $\xi f + \eta f$ ambas son elementos de $\mathbb{C}^X$, y para cada x en X

$$((\xi+\eta)f)(x) = (\xi+\eta)f(x) = \xi f(x) + \eta f(x) = (\xi f)(x) + (\eta f)(x) = \big((\xi f) + (\eta f)\big)(x).$$

Hemos usado la definición de las operaciones lineales en $\mathbb{C}^X$ y la propiedad distributiva en $\mathbb{C}$. $\square$

3 Observación. En $\mathbb{C}^X$ se puede definir la multiplicación punto a punto:

$$(fg)(x) := f(x)g(x) \qquad (x \in X).$$

Esta operación es asociativa y conmutativa. Denotemos por 1_X la función constante uno:

$$1_X(x) := 1 \qquad (x \in X).$$

Esta función es un elemento neutro para la operación de multiplicación de funciones. Por lo tanto, $\mathbb{C}^X$ es un álgebra compleja asociativa y conmutativa con identidad.

4 Observación. En análisis funcional y en otras partes de las matemáticas se consideran varios espacios de funciones:

- $B(X)$, el espacio de las funciones acotadas;
- $C(X)$, el espacio de las funciones continuas en X, donde X es un espacio topológico;
- $C_0(X)$, el espacio de las funciones continuas en X que tienden a cero en infinito, donde X es un espacio topológico localmente compacto;
- $C_u(X)$, el espacio de las funciones uniformemente continuas en X, donde X es un espacio métrico;
- $C^m(X)$, el espacio de las funciones continuamente derivables en X, donde X es un intervalo de $\mathbb{R}$;
- $\text{Höl}^\alpha(X)$, el espacio de las funciones α-Hölder continuas, donde $0 < \alpha \le 1$ y X es un espacio métrico;
- $\text{Lip}(X)$, el espacio de las funciones Lipschitz continuas, donde X es un espacio métrico;
- $\text{BV}(X)$, el espacio de las funciones de variación acotada, donde X es es un intervalo cerrado acotado de $\mathbb{R}$;
- $\text{AC}(X)$, el espacio de las funciones absolutamente continuas, donde X es es un intervalo cerrado acotado de $\mathbb{R}$.

Todos estos espacios son subespacios vectoriales de $\mathbb{C}^X$. Notemos que para cada uno de estos espacios de funciones no es necesario verificar los axiomas de espacio vectorial; es suficiente verificar que es cerrado bajo las operaciones lineales e incluye a la función nula.