El espacio de sucesiones acotadas y algunos de sus subespacios

1 Definición. Definimos $N_\infty\colon \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to [0,+\infty]$, mediante la regla

$$N_\infty(a) \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

Denotemos por $\ell^\infty(\mathbb{N})$ al conjunto

$$\{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}:\ \ N_\infty(a) < +\infty\},$$

y por $\|\cdot\|_\infty$ a la función N_∞ restringida a $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

2 Proposición. *La función N_∞ es subaditiva y homogénea absoluta. Si $N_\infty(a) = 0$, entonces $a = 0_{\mathbb{N}}$.*

3 Proposición. $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ *es un espacio vectorial normado.*

4 Proposición. *Sea $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ y sea $k \in \mathbb{N}$. Entonces $|a_k| \le \|a\|_\infty$.*

5 Proposición. *El espacio $\ell^\infty(\mathbb{N})$ es completo.*

Demostración. Sea $A = (a^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Si $p, q \in \mathbb{N}$, $p, q \ge m$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$|a_k^{(p)} - a_k^{(q)}| \le \Omega_A(m). \tag{1}$$

Entonces para cada k en $\mathbb{N}$ la sucesión $(a_k^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$ y por lo tanto tiene un límite b_k. En la desigualdad (1) pasamos al límite cuando $q \to \infty$. Obtenemos

$$|a_k^{(p)} - b_k| \le \Omega_A(m).$$

Pamos al supremo sobre k:

$$N_\infty(a^{(p)} - b) \le \Omega_A(m).$$

Luego $b \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ y $\|a^{(p)} - b\|_\infty \to 0$. □

6 Proposición. $c(\mathbb{N})$ *es un subespacio cerrado de $\ell^\infty(\mathbb{N})$.*

7 Proposición. $c_0(\mathbb{N})$ *es un subespacio cerrado de $\ell^\infty(\mathbb{N})$.*

8 Definición. Espacio $\ell^p(\mathbb{N})$.

9 Proposición. *El espacio $\ell^p(\mathbb{N})$ es completo.*