El espacio normado de las funciones acotadas
(un tema de la unidad “Espacios normados”)

Egor Maximenko
https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

19 de septiembre de 2022

Plan

Objetivo:

definir el espacio normado $B(X)$ de las funciones acotadas $X \to \mathbb{C}$,
con la norma-supremo.

Objetivo:
definir el espacio normado $B(X)$ de las funciones acotadas $X \to \mathbb{C}$,
con la norma-supremo.

Prerrequisitos:

- espacios normados;
- conjuntos acotados;
- el supremo de una función.

Plan

La imagen de la suma de dos funciones

Sea X un conjunto no vacío.

Proposición

Sean $f, g\colon X \to \mathbb{C}$. Entonces $\quad (f+g)[X] \subseteq f[X] + g[X]$.

La imagen de la suma de dos funciones

Sea X un conjunto no vacío.

Proposición

Sean $f, g\colon X \to \mathbb{C}$. Entonces $\quad (f+g)[X] \subseteq f[X] + g[X]$.

Demostración. Se sigue fácilmente de las siguientes descripciones:

$$(f+g)[X] = \{w \in \mathbb{C}\colon \quad \exists x \in X \quad f(x) + g(x) = w\},$$

$$\begin{aligned} f[X] + g[X] &= \{w \in \mathbb{C}\colon \quad \exists u \in f[X] \quad \exists v \in g[X] \quad w = u + v\} \\ &= \{w \in \mathbb{C}\colon \quad \exists x \in X \quad \exists y \in X \quad f(x) + g(y) = w\}. \end{aligned}$$

$\square$

La imagen del producto de una función por un escalar

Proposición

Sean $f\colon X \to \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $\quad (\lambda f)[X] = \lambda f[X]$.

La imagen del producto de una función por un escalar

Proposición

Sean $f\colon X \to \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $\quad (\lambda f)[X] = \lambda f[X]$.

Demostración. Si $\lambda = 0$, entonces ambos lados son $\{0\}$. Sea $\lambda \neq 0$.

$$\begin{aligned}
(\lambda f)[X] &= \{v \in \mathbb{C} \colon \quad \exists x \in X \quad \lambda f(x) = v\} \\
&= \left\{v \in \mathbb{C} \colon \quad \exists x \in X \quad f(x) = \frac{v}{\lambda}\right\} \\
&= \left\{v \in \mathbb{C} \colon \quad \frac{v}{\lambda} \in f[X]\right\} = \lambda f[X].
\end{aligned}$$

$\square$

Plan

La norma extendida definida como el supremo

Dada $f\colon X \to \mathbb{C}$, $\quad N(f) := \sup_{x \in X} |f(x)| := \sup\Big\{ v \in [0, +\infty) : \quad \exists x \in X \quad |f(x)| = v \Big\}.$

La norma extendida definida como el supremo

Dada $f\colon X \to \mathbb{C}$, $\quad N(f) := \sup\limits_{x \in X} |f(x)| := \sup\Big\{ v \in [0, +\infty)\colon \quad \exists x \in X \quad |f(x)| = v \Big\}.$

Proposición

Sean $f, g \in \mathbb{C}^X$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $N(f+g) \le N(f) + N(g)$.

La norma extendida definida como el supremo

Dada $f: X \to \mathbb{C}$, $\quad N(f) := \sup\limits_{x \in X} |f(x)| := \sup\Big\{ v \in [0, +\infty) : \quad \exists x \in X \quad |f(x)| = v \Big\}.$

Proposición

Sean $f, g \in \mathbb{C}^X$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $N(f+g) \le N(f) + N(g)$.

Demostración. Para cada x en X,

$$|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le N(f) + N(g).$$

La norma extendida definida como el supremo

Dada $f\colon X \to \mathbb{C}$, $\quad N(f) := \sup\limits_{x\in X} |f(x)| := \sup\Big\{v \in [0,+\infty)\colon \quad \exists x \in X \quad |f(x)| = v\Big\}.$

Proposición

Sean $f, g \in \mathbb{C}^X$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $N(f+g) \le N(f) + N(g)$.

Demostración. Para cada x en X,

$$|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le N(f) + N(g).$$

Luego $N(f) + N(g)$ es una cota superior de

$$\{v \in [0,+\infty)\colon \qquad \exists x \in X \qquad |(f+g)(x)| = v\}. \qquad \square$$

Proposición

Sean $f \in \mathbb{C}^X$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$.

Proposición

Sean $f \in \mathbb{C}^X$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$.

Demostración. 1. Si $\lambda = 0$, ambos lados son 0. Suponemos $\lambda \neq 0$.

Proposición

Sean $f \in \mathbb{C}^X$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$.

Demostración. 1. Si $\lambda = 0$, ambos lados son 0. Suponemos $\lambda \neq 0$.

2. Demostremos que $N(\lambda f) \leq |\lambda| N(f)$. En efecto, para cada x en X,

$$|(\lambda f)(x)| = |\lambda|\,|f(x)| \leq |\lambda| N(f).$$

Proposición

Sean $f \in \mathbb{C}^X$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$.

Demostración. 1. Si $\lambda = 0$, ambos lados son 0. Suponemos $\lambda \neq 0$.

2. Demostremos que $N(\lambda f) \leq |\lambda| N(f)$. En efecto, para cada x en X,

$$|(\lambda f)(x)| = |\lambda| \, |f(x)| \leq |\lambda| N(f).$$

3. Usamos el hecho que $f = \frac{1}{\lambda}(\lambda f)$.

$$|\lambda| N(f) = |\lambda| N\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda f)\right) \leq |\lambda| \cdot \frac{1}{|\lambda|} N(\lambda f) = N(\lambda f). \qquad \square$$

Plan

El espacio $B(X)$

Dada una función $f: X \to \mathbb{C}$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $f[X]$ es un conjunto acotado en $\mathbb{C}$;

(b) f es acotada: $\exists M \geq 0 \quad \forall x \in X \quad |f(x)| \leq M$;

(c) $N(f) < +\infty$.

El espacio $B(X)$

Dada una función $f\colon X \to \mathbb{C}$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $f[X]$ es un conjunto acotado en $\mathbb{C}$;

(b) f es acotada: $\exists M \geq 0 \quad \forall x \in X \quad |f(x)| \leq M$;

(c) $N(f) < +\infty$.

$$B(X) \;:=\; \{f \in \mathbb{C}^X : \; N(f) < +\infty\}.$$

El espacio $B(X)$

Dada una función $f\colon X \to \mathbb{C}$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $f[X]$ es un conjunto acotado en $\mathbb{C}$;

(b) f es acotada: $\quad \exists M \ge 0 \quad \forall x \in X \quad |f(x)| \le M$;

(c) $N(f) < +\infty$.

$$B(X) \;:=\; \{f \in \mathbb{C}^X \colon\; N(f) < +\infty\}.$$

La norma $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ en $B(X)$ se define como la restricción de N.

$$\|f\|_{\text{sup}} \;:=\; \sup\Big\{v \in [0,+\infty)\colon \quad \exists x \in X \quad |f(x)| = v\Big\}.$$

El espacio $B(X)$

$$B(X) \;:=\; \{f \in \mathbb{C}^X :\; N(f) < +\infty\}.$$

$$\|f\|_{\mathrm{sup}} \;:=\; \sup\Big\{v \in [0,+\infty) : \quad \exists x \in X \quad |f(x)| = v\Big\}.$$

El espacio $B(X)$

$$B(X) \;:=\; \{f \in \mathbb{C}^X :\; N(f) < +\infty\}.$$

$$\|f\|_{\mathrm{sup}} \;:=\; \sup\Big\{v \in [0,+\infty) : \quad \exists x \in X \quad |f(x)| = v\Big\}.$$

Proposición

$B(X)$ es un espacio normado.

El espacio $B(X)$

$$B(X) \;:=\; \{f \in \mathbb{C}^X : \; N(f) < +\infty\}.$$

$$\|f\|_{\text{sup}} \;:=\; \sup\Big\{v \in [0, +\infty) : \quad \exists x \in X \quad |f(x)| = v\Big\}.$$

Proposición

$B(X)$ es un espacio normado.

Demostración. Se sigue del hecho que N es una norma extendida. $\square$

La norma-supremo domina a los valores en cada punto

Proposición

Para cada x en X y cada f en $B(X)$,

$$|f(x)| \leq \|f\|_{\sup}.$$

La norma-supremo domina a los valores en cada punto

Proposición

Para cada x en X y cada f en $B(X)$,

$$|f(x)| \leq \|f\|_{\text{sup}}.$$

Se sigue de la definición de $\|f\|_{\text{sup}}$.

La convergencia en $B(X)$ es la convergencia uniforme

Proposición

Sea $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B(X)^{\mathbb{N}}$ y sea $g \in B(X)$.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - g\|_{\sup} = 0$.

(b) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g$, esto es,

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq k \qquad \forall x \in X \qquad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

La convergencia en $B(X)$ es la convergencia uniforme

Proposición

Sea $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B(X)^{\mathbb{N}}$ y sea $g \in B(X)$.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - g\|_{\sup} = 0.$

(b) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g$, esto es,

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq k \qquad \forall x \in X \qquad \big|f_n(x) - g(x)\big| < \varepsilon.$$

Idea de demostración.

$$\Big(\forall x \in X \quad \big|f_n(x) - g(x)\big| \leq \eta\Big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sup_{x\in X} \big|f_n(x) - g(x)\big| \leq \eta. \qquad \square$$

La convergencia en $B(X)$ implica la convergencia puntual

Proposición

Sea $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B(X)^{\mathbb{N}}$ y sea $g \in B(X)$. Supongamos que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{B(X)} g$, esto es,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - g\|_{\sup} = 0.$$

Entonces $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g$, esto es,

$$\forall a \in X \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(a) = g(a).$$

La convergencia en $B(X)$ implica la convergencia puntual

Proposición

Sea $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B(X)^{\mathbb{N}}$ y sea $g \in B(X)$. Supongamos que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{B(X)} g$, esto es,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - g\|_{\sup} = 0.$$

Entonces $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} g$, esto es,

$$\forall a \in X \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(a) = g(a).$$

Demostración. Se sigue de la desigualdad $|f_n(a) - g(a)| \leq \|f_n - g\|_{\sup}$. $\square$

La convergencia puntual no implica la convergencia en $B(X)$

Ejercicio. Sea $X = [0, 1]$. Construir una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B([0, 1])^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\forall x \in [0, 1] \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0,$$

pero

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|f_n\|_{\sup} \geq 1.$$