El espacio normado de las funciones acotadas es completo

(un tema de la unidad “Espacios normados”)

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

22 de septiembre de 2022

Plan

Objetivo:

- demostrar que el espacio normado $B(X)$ es completo.

Objetivo:

- demostrar que el espacio normado $B(X)$ es completo.

Prerrequisitos:

- el espacio normado $B(X)$,
- sucesiones de Cauchy,
- el medidor de Cauchy de una sucesión,
- sucesiones regulares de Cauchy,
- completez de $\mathbb{C}$.

Repaso: la norma extendida en $\mathbb{C}^X$ definida como el supremo de los valores absolutos

Dada $f\colon X \to \mathbb{C}$,

$$N(f) := \sup_{x\in X} |f(x)| := \sup\Big\{v \in [0,+\infty)\colon \quad \exists x \in X \quad |f(x)| = v\Big\}.$$

Repaso: la norma extendida en $\mathbb{C}^X$ definida como el supremo de los valores absolutos

Dada $f\colon X \to \mathbb{C}$,

$$N(f) := \sup_{x\in X} |f(x)| := \sup\Big\{v \in [0,+\infty) \colon \quad \exists x \in X \quad |f(x)| = v\Big\}.$$

Proposición

N es una norma extendida en $\mathbb{C}^X$.

Repaso: el espacio $B(X)$

Dada una función $f\colon X \to \mathbb{C}$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $f[X]$ es un conjunto acotado en $\mathbb{C}$;

(b) f es acotada: $\quad \exists M \geq 0 \quad \forall x \in X \quad |f(x)| \leq M$;

(c) $N(f) < +\infty$.

Repaso: el espacio $B(X)$

Dada una función $f\colon X \to \mathbb{C}$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $f[X]$ es un conjunto acotado en $\mathbb{C}$;

(b) f es acotada: $\quad \exists M \geq 0 \quad \forall x \in X \quad |f(x)| \leq M$;

(c) $N(f) < +\infty$.

$$B(X) \;:=\; \{f \in \mathbb{C}^X \colon\; N(f) < +\infty\}.$$

Repaso: el espacio $B(X)$

Dada una función $f\colon X \to \mathbb{C}$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $f[X]$ es un conjunto acotado en $\mathbb{C}$;

(b) f es acotada: $\quad \exists M \geq 0 \quad \forall x \in X \quad |f(x)| \leq M$;

(c) $N(f) < +\infty$.

$$B(X) \;:=\; \{f \in \mathbb{C}^X\colon\; N(f) < +\infty\}.$$

La norma $\|\cdot\|_{\sup}$ en $B(X)$ se define como la restricción de N.

$$\|f\|_{\sup} \;:=\; \sup\Big\{v \in [0,+\infty)\colon \quad \exists x \in X \quad |f(x)| = v\Big\}.$$

El espacio $B(X)$

$$B(X) \;:=\; \{f \in \mathbb{C}^X :\; N(f) < +\infty\}.$$

$$\|f\|_{\mathsf{sup}} \;:=\; \sup\Big\{v \in [0, +\infty) : \quad \exists x \in X \quad |f(x)| = v\Big\}.$$

El espacio $B(X)$

$$B(X) \;:=\; \{f \in \mathbb{C}^X :\;\; N(f) < +\infty\}.$$

$$\|f\|_{\text{sup}} \;:=\; \sup\Big\{v \in [0,+\infty) : \quad \exists x \in X \quad |f(x)| = v\Big\}.$$

Proposición

$B(X)$ es un espacio normado.

El espacio $B(X)$

$$B(X) \ := \ \{f \in \mathbb{C}^X : \ N(f) < +\infty\}.$$

$$\|f\|_{\sup} \ := \ \sup\Big\{v \in [0, +\infty) : \quad \exists x \in X \quad |f(x)| = v\Big\}.$$

Proposición

$B(X)$ es un espacio normado.

Demostración. Se sigue del hecho que N es una norma extendida. $\square$

Repaso: la norma-supremo domina a los valores en cada punto

Proposición

Sean $f \in B(X)$, $a \in X$. Entonces
$$|f(a)| \leq \|f\|_{\mathrm{sup}}.$$

Repaso: la norma-supremo domina a los valores en cada punto

Proposición

Sean $f \in B(X)$, $a \in X$. Entonces

$$|f(a)| \leq \|f\|_{\mathrm{sup}}.$$

Se sigue de la definición de $\|f\|_{\mathrm{sup}}$.

Repaso: la norma-supremo domina a los valores en cada punto

Proposición

Sean $f \in B(X)$, $a \in X$. Entonces
$$|f(a)| \leq \|f\|_{\sup}.$$

Se sigue de la definición de $\|f\|_{\sup}$.

Corolario

Sean $g, h \in B(X)$, $a \in X$. Entonces $|g(a) - h(a)| \leq \|g - h\|_{\sup}$.

Repaso: la norma-supremo domina a los valores en cada punto

Proposición

Sean $f \in B(X)$, $a \in X$. Entonces

$$|f(a)| \leq \|f\|_{\mathrm{sup}}.$$

Se sigue de la definición de $\|f\|_{\mathrm{sup}}$.

Corolario

Sean $g, h \in B(X)$, $a \in X$. Entonces $|g(a) - h(a)| \leq \|g - h\|_{\mathrm{sup}}$.

Demostración. Notamos que $|g(a) - h(a)| = |(g - h)(a)|$,
aplicamos la proposición a la función $f = g - h$.

Repaso: el medidor de Cauchy de una sucesión

Dado un espacio métrico (M, d) y una sucesión $s \in M^{\mathbb{N}}$,

$$\gamma_s(k) \ := \ \sup\Big\{d(s_m, s_n)\colon \ m, n \geq k\Big\}.$$

Repaso: el medidor de Cauchy de una sucesión

Dado un espacio métrico (M, d) y una sucesión $s \in M^{\mathbb{N}}$,

$$\gamma_s(k) \ := \ \sup\Big\{ d(s_m, s_n) \colon \ m, n \geq k \Big\}.$$

Sabemos que s es de Cauchy si, y sólo si,

Repaso: el medidor de Cauchy de una sucesión

Dado un espacio métrico (M, d) y una sucesión $s \in M^{\mathbb{N}}$,

$$\gamma_s(k) \ := \ \sup\Big\{ d(s_m, s_n) \colon \ m, n \geq k \Big\}.$$

Sabemos que s es de Cauchy si, y sólo si,
los diámetros de sus colas tienden a cero:

$$\lim_{k \to \infty} \gamma_s(k) = 0.$$

Plan

Sucesiones de Cauchy en $B(X)$ y sucesiones de sus valores en un punto

Lema

Sea $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $B(X)$ y sea $a \in X$.

Entonces $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Sucesiones de Cauchy en $B(X)$ y sucesiones de sus valores en un punto

Lema

Sea $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $B(X)$ y sea $a \in X$.
Entonces $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Demostración. Pongamos $s \coloneqq (f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$.

Sucesiones de Cauchy en $B(X)$ y sucesiones de sus valores en un punto

Lema

Sea $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $B(X)$ y sea $a \in X$.

Entonces $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Demostración. Pongamos $s \coloneqq (f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\left|s_n - s_m\right|$$

Sucesiones de Cauchy en $B(X)$ y sucesiones de sus valores en un punto

Lema

Sea $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $B(X)$ y sea $a \in X$.

Entonces $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Demostración. Pongamos $s \coloneqq (f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$.

$$|s_n - s_m| =$$

Sucesiones de Cauchy en $B(X)$ y sucesiones de sus valores en un punto

Lema

Sea $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $B(X)$ y sea $a \in X$.
Entonces $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Demostración. Pongamos $s \coloneqq (f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$.

$$|s_n - s_m| = |f_n(a) - f_m(a)|$$

Sucesiones de Cauchy en $B(X)$ y sucesiones de sus valores en un punto

Lema

Sea $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $B(X)$ y sea $a \in X$.
Entonces $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Demostración. Pongamos $s \coloneqq (f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$.

$$|s_n - s_m| = |f_n(a) - f_m(a)| =$$

Sucesiones de Cauchy en $B(X)$ y sucesiones de sus valores en un punto

Lema

Sea $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $B(X)$ y sea $a \in X$.
Entonces $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Demostración. Pongamos $s \coloneqq (f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$.

$$|s_n - s_m| = |f_n(a) - f_m(a)| = |(f_n - f_m)(a)|$$

Sucesiones de Cauchy en $B(X)$ y sucesiones de sus valores en un punto

Lema

Sea $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $B(X)$ y sea $a \in X$.
Entonces $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Demostración. Pongamos $s \coloneqq (f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$.

$$|s_n - s_m| = |f_n(a) - f_m(a)| = |(f_n - f_m)(a)| \leq$$

Sucesiones de Cauchy en $B(X)$ y sucesiones de sus valores en un punto

Lema

Sea $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $B(X)$ y sea $a \in X$.
Entonces $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Demostración. Pongamos $s \coloneqq (f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$.

$$|s_n - s_m| = |f_n(a) - f_m(a)| = |(f_n - f_m)(a)| \le \|f_n - f_m\|_{\sup}.$$

Sucesiones de Cauchy en $B(X)$ y sucesiones de sus valores en un punto

Lema

Sea $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $B(X)$ y sea $a \in X$.
Entonces $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Demostración. Pongamos $s \coloneqq (f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$.

$$|s_n - s_m| = |f_n(a) - f_m(a)| = |(f_n - f_m)(a)| \leq \|f_n - f_m\|_{\sup}.$$

Entonces para cada k en $\mathbb{N}$

$$\gamma_s(k)$$

Sucesiones de Cauchy en $B(X)$ y sucesiones de sus valores en un punto

Lema

Sea $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $B(X)$ y sea $a \in X$.
Entonces $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Demostración. Pongamos $s := (f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$.

$$|s_n - s_m| = |f_n(a) - f_m(a)| = |(f_n - f_m)(a)| \le \|f_n - f_m\|_{\sup}.$$

Entonces para cada k en $\mathbb{N}$

$$\gamma_s(k) \le \gamma_f(k).$$

Como $\gamma_f \to 0$, también $\gamma_s \to 0$. $\square$

Sucesiones de Cauchy en $B(X)$ y límites puntuales

Lema

Sea $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $B(X)$ y sea $g\colon X \to \mathbb{C}$ tal que

$$\forall x \in X \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x).$$

Entonces

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq k \qquad N(g - f_n) \leq \gamma_f(k).$$

Demostración

Sea $k \in \mathbb{N}$. Por la definición de $\gamma_f(k)$,

Demostración

Sea $k \in \mathbb{N}$. Por la definición de $\gamma_f(k)$,

$$\forall m, n \geq k \qquad \forall x \in X \qquad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{\sup} < \gamma_f(k).$$

Demostración

Sea $k \in \mathbb{N}$. Por la definición de $\gamma_f(k)$,

$$\forall m, n \geq k \qquad \forall x \in X \qquad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{\sup} < \gamma_f(k).$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$
(usamos la continuidad del valor absoluto y de las operaciones algebraicas en $\mathbb{C}$):

Demostración

Sea $k \in \mathbb{N}$. Por la definición de $\gamma_f(k)$,

$$\forall m, n \geq k \qquad \forall x \in X \qquad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{\sup} < \gamma_f(k).$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$
(usamos la continuidad del valor absoluto y de las operaciones algebraicas en $\mathbb{C}$):

$$\forall n \geq k \qquad \forall x \in X \qquad |f_n(x) - g(x)| \leq \gamma_f(k).$$

Demostración

Sea $k \in \mathbb{N}$. Por la definición de $\gamma_f(k)$,

$$\forall m, n \geq k \qquad \forall x \in X \qquad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{\sup} < \gamma_f(k).$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$
(usamos la continuidad del valor absoluto y de las operaciones algebraicas en $\mathbb{C}$):

$$\forall n \geq k \qquad \forall x \in X \qquad |f_n(x) - g(x)| \leq \gamma_f(k).$$

Luego

Demostración

Sea $k \in \mathbb{N}$. Por la definición de $\gamma_f(k)$,

$$\forall m, n \geq k \qquad \forall x \in X \qquad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{\sup} < \gamma_f(k).$$

Pasamos al límite cuando $m \to \infty$
(usamos la continuidad del valor absoluto y de las operaciones algebraicas en $\mathbb{C}$):

$$\forall n \geq k \qquad \forall x \in X \qquad |f_n(x) - g(x)| \leq \gamma_f(k).$$

Luego

$$\forall n \geq k \qquad N(f_n - g) \leq \gamma_f(k).$$

Sucesiones de Cauchy en $B(X)$, la convergencia puntual y uniforme

Lema

Sea $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $B(X)$ y sea $g\colon X \to \mathbb{C}$ tal que

$$\forall x \in X \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x).$$

Entonces $\quad g \in B(X) \quad$ y $\quad \lim_{n\to\infty} \|f_n - g\|_{\sup} = 0.$

Demostración

Ya sabemos que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq k \qquad N(f_n - g) \leq \gamma_f(k).$$

Demostración

Ya sabemos que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq k \qquad N(f_n - g) \leq \gamma_f(k).$$

Además, como f es de Cauchy,

Demostración

Ya sabemos que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq k \qquad N(f_n - g) \leq \gamma_f(k).$$

Además, como f es de Cauchy, $\quad \lim\limits_{k\to\infty} \gamma_f(k) = 0.$

Demostración

Ya sabemos que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq k \qquad N(f_n - g) \leq \gamma_f(k).$$

Además, como f es de Cauchy, $\quad \lim\limits_{k\to\infty} \gamma_f(k) = 0.$

Concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} N(f_n - g) = 0.$$

Demostración

Ya sabemos que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq k \qquad N(f_n - g) \leq \gamma_f(k).$$

Además, como f es de Cauchy, $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_f(k) = 0.$

Concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} N(f_n - g) = 0.$$

Encontramos k tal que $N(f_k - g) < 1$. Luego

Demostración

Ya sabemos que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq k \qquad N(f_n - g) \leq \gamma_f(k).$$

Además, como f es de Cauchy, $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \gamma_f(k) = 0.$

Concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} N(f_n - g) = 0.$$

Encontramos k tal que $N(f_k - g) < 1$. Luego

$$N(g) \leq N(g - f_k) + N(f_k) < +\infty.$$

Demostración

Ya sabemos que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq k \qquad N(f_n - g) \leq \gamma_f(k).$$

Además, como f es de Cauchy, $\quad \lim_{k\to\infty} \gamma_f(k) = 0.$

Concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} N(f_n - g) = 0.$$

Encontramos k tal que $N(f_k - g) < 1$. Luego

$$N(g) \leq N(g - f_k) + N(f_k) < +\infty.$$

Hemos mostrado que $g \in B(X)$ y $\|f_n - g\|_{\sup} = N(f_n - g) \to 0$, cuando $n \to \infty$.

Completez de $B(X)$

Teorema

El espacio $B(X)$ es completo.

Completez de $B(X)$

Teorema

El espacio $B(X)$ es completo.

Demostración: se sigue de los lemas.

Completez de $B(X)$

Teorema

El espacio $B(X)$ es completo.

Demostración: se sigue de los lemas.

Ejercicio. Escribir otra demostración, usando solamente sucesiones regulares de Cauchy.

Ejercicios sobre $B(X)$

Ejercicio. Demostrar que la norma $\|\cdot\|_{\sup}$ es submultiplicativa:

$$\|f\,g\|_{\sup} \leq \|f\|_{\sup}\,\|g\|_{\sup}.$$

Ejercicios sobre $B(X)$

Ejercicio. Demostrar que la norma $\|\cdot\|_{\sup}$ es submultiplicativa:

$$\|f\,g\|_{\sup} \leq \|f\|_{\sup}\,\|g\|_{\sup}.$$

Ejercicio. Construir ejemplos con

$$\|f\,g\|_{\sup} < \|f\|_{\sup}\,\|g\|_{\sup}.$$

Ejercicios sobre $B(X)$

Ejercicio. Demostrar que la norma $\|\cdot\|_{\sup}$ es submultiplicativa:

$$\|f\,g\|_{\sup} \leq \|f\|_{\sup}\,\|g\|_{\sup}.$$

Ejercicio. Construir ejemplos con

$$\|f\,g\|_{\sup} < \|f\|_{\sup}\,\|g\|_{\sup}.$$

Ejercicio. Mostrar que $B(X)$ es un álgebra de Banach conmutativa con identidad.
Buscar las definiciones correspondientes en libros.

Funciones acotadas después de multiplicar por un peso

Para cada $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, pongamos

$$\psi(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| e^{-x^2} f(x) \right|, \qquad V := \left\{ f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \colon \quad \psi(f) < +\infty \right\}.$$

V se considera con ψ restringida.

Funciones acotadas después de multiplicar por un peso

Para cada $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, pongamos

$$\psi(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| e^{-x^2} f(x) \right|, \qquad V := \left\{ f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \colon \quad \psi(f) < +\infty \right\}.$$

V se considera con ψ restringida.

Ejercicio. Demostrar que ψ es una norma extendida en $\mathbb{C}^X$.

Funciones acotadas después de multiplicar por un peso

Para cada $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, pongamos

$$\psi(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| e^{-x^2} f(x) \right|, \qquad V := \left\{ f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}} : \quad \psi(f) < +\infty \right\}.$$

V se considera con ψ restringida.

Ejercicio. Demostrar que ψ es una norma extendida en $\mathbb{C}^X$.

Ejercicio. Demostrar que V es un espacio de Banach.

Funciones acotadas después de multiplicar por un peso

Para cada $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, pongamos

$$\psi(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| e^{-x^2} f(x) \right|, \qquad V := \left\{ f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \colon \quad \psi(f) < +\infty \right\}.$$

V se considera con ψ restringida.

Ejercicio. Demostrar que ψ es una norma extendida en $\mathbb{C}^X$.

Ejercicio. Demostrar que V es un espacio de Banach.

Ejercicio. Demostrar que las funciones polinomiales pertenecen al espacio V.