Análisis Funcional.
Tarea "Espacios normados".
Variante α.

Bolas en espacios normados, desplazamientos y dilataciones en espacios normados, propiedades de operaciones con conjuntos en espacios vectoriales, conjuntos convexos, cerraduras y subespacios, continuidad de operaciones lineales en espacios normados, propiedades de subespacios en espacios normados, el cociente de espacios normados o seminormados, ejemplos de bolas unitarias no totalmente acotadas.

Ejercicio 1. *3 %.*
Ejemplos de puntos pertenecientes a un rayo. Sea X el espacio normado $\mathbb{R}^2$ con la norma euclidiana. Sean $a = (-1, 2)$, $b = (3, 1)$, $r = \|b - a\|$. Dibujar la bola $B(a, r)$. Dibujar un trozo de la recta que pasa por los puntos a y b. En esta recta marcar los puntos $p(0.5)$, $p(0.9)$, $p(1.1)$ y $p(1.5)$, donde

$$p(t) := (1 - t)a + tb.$$

Ejercicio 2. *10 %.*
En los espacios normados, la cerradura de la bola abierta es la bola cerrada con el mismo radio. Sean V un espacio normado complejo, $a \in V$, $r > 0$. Demostrar que

$$\operatorname{cl}(B(a, r)) = \overline{B}(a, r).$$

Ejercicio 3. *5 %.*
Operaciones lineales con conjuntos en espacios vectoriales. Sea V un espacio vectorial complejo y sean $A, B, C \subseteq V$. Demostrar que

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

Ejercicio 4. *6 %.*
La adición en los espacios normados es continua. Sea V un espacio normado. Recordar la definición de la topología del producto en $V \times V$. Demostrar que la operación adición $V \times V \to V$ es continua.

Ejercicio 5. *10 %.*
Convergencia en espacios de sucesiones, ejemplo. En el espacio ℓ^1 consideremos la sucesión $x = (x^m)_{m\in\mathbb{N}}$, definida mediante la siguiente regla:

$$x^m := \sum_{k=1}^{m} e_k = \Big(\underbrace{1, \ldots, 1}_{m}, 0, 0, \ldots\Big).$$

Determinar si esta sucesión tiene un límite en ℓ^1. Justificar bien la respuesta.

Ejercicio 6. *5 %.*
Combinaciones convexas de combinaciones convexas son combinaciones convexas. Sea V un espacio vectorial real o complejo y sean $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q \in V$, $u \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_p)$, $v \in \operatorname{conv}(b_1, \ldots, b_q)$, $w \in \operatorname{conv}(u, v)$. Demostrar que $w \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q)$.

Ejercicio 7. *5 %.*
Envolturas convexas. Sea V un espacio vectorial real o complejo y sea $A \subseteq V$. Demostrar que $\operatorname{conv}_2(\operatorname{conv}(A)) \subseteq \operatorname{conv}(A)$. Sugerencia: usar el resultado del ejercicio anterior.

Ejercicio 8. *5 %.*
Cada bola en un espacio normado es un conjunto convexo. Sea V un espacio normado complejo y sean $a \in V$, $r > 0$. Demostrar que la bola $B(a, r)$ es un conjunto convexo.

Ejercicio 9. *7 %.*
La suma del conjunto cerrado con el conjunto compacto es un conjunto cerrado. Sea V un espacio normado complejo y sean $P, Q \subseteq V$ tales que P es cerrado y Q es compacto. Demostrar que $P + Q$ es cerrado.

Ejercicio 10. *7 %.*
La cerradura del conjunto convexo es un conjunto convexo. Sea V un espacio normado complejo y sea $A \subseteq V$. Supongamos que A es convexo. Demostrar que $\operatorname{cl}(A)$ es convexo.

Ejercicio 11. *5 %.*
Ejemplo de normas equivalentes. Demostrar de manera explícita que las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ en el espacio $\mathbb{C}^n$ son equivalentes. En otras palabras, encontrar $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$ tales que para cada x en $\mathbb{C}^n$

$$\|x\|_1 \leqslant C_1 \|x\|_\infty, \qquad \|x\|_\infty \leqslant C_2 \|x\|_1.$$

Ejercicio 12. *8 %.*
Ejemplo de normas no equivalentes. Demostrar que las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ en el espacio ℓ^1 son equivalentes. Sugerencia: para cada $M > 0$ encontrar a en ℓ^1 tal que

$$\|a\|_1 > M\|a\|_\infty.$$

Ejercicio 13. *8 %.*
La esfera unitaria en ℓ^2 no es totalmente acotada. Construir de manera explícita una sucesión $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ en ℓ^2 tal que $\|a_m\|_2 = 1$ para cada m en $\mathbb{N}$ y

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \qquad \Big(m \neq n \qquad \Longrightarrow \qquad \|a_m - a_n\|_2 \geqslant 1\Big).$$

Ejercicio 14. *5 %.*
El espacio normado de las sucesiones acotadas. Demostrar que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ es un espacio normado. Este espacio consiste de todas las sucesiones acotadas, y la norma se define mediante la regla

$$\|a\|_\infty \coloneqq \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|.$$

Ejercicio 15. *7 %.*
Ejemplo de espacio normado completo. Demostrar que el espacio $\ell^\infty(\mathbb{N})$ es completo. Este espacio consiste de todas las sucesiones acotadas, y la norma se define mediante la regla

$$\|a\|_\infty \coloneqq \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|.$$

Ejercicio 16. *8 %.*
Cada subespacio del espacio normado tiene interior vacío o coincide con el espacio total. Sea V un espacio normado complejo y sea W un subespacio de V. Supongamos que $\operatorname{int}(W) \neq \emptyset$. Demostrar que $W = V$.

Ejercicio 17. *6 %.*
Ejemplo de cálculo de la norma en el espacio cociente $\mathbb{R}^2/W$. En el espacio $V = \mathbb{R}^2$ con la norma euclidiana consideremos el subespacio $W = \ell(a)$, donde

$$a = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Sea $x = [x_1, x_2]^\top$ en $\mathbb{R}^2$. Consideremos la función $f_x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_x(\lambda) := \|x + \lambda a\|^2$. Calcular el valor mínimo de esta función usando la derivada.
II. Sea $x = [x_1, x_2]^\top$. Calcular la norma del elemento $x + W$ del espacio cociente V/W.

Ejercicio 18. *7 %.*
Cada isomorfismo de espacios normados complejos de dimensión finita es un homeomorfismo. Sea V un espacio normado de dimensión n y sea $T \colon \mathbb{C}^n \to V$ un isomorfismo. Demostrar que T es un homeomorfismo. Sugerencia: usar el hecho que cualesquiera dos normas en $\mathbb{C}^n$ son equivalentes.

Análisis Funcional.
Tarea “Espacios normados”.
Variante 0.

Bolas en espacios normados, desplazamientos y dilataciones en espacios normados, propiedades de operaciones con conjuntos en espacios vectoriales, conjuntos convexos, cerraduras y subespacios, continuidad de operaciones lineales en espacios normados, propiedades de subespacios en espacios normados, el cociente de espacios normados o seminormados, ejemplos de bolas unitarias no totalmente acotadas.

Ejercicio 1. *3 %.*
Ejemplos de puntos pertenecientes a un rayo. Sea X el espacio normado $\mathbb{R}^2$ con la norma euclidiana. Sean $a = (3, -1)$, $b = (1, 2)$, $r = \|b - a\|$. Dibujar la bola $B(a, r)$. Dibujar un trozo de la recta que pasa por los puntos a y b. En esta recta marcar los puntos $p(0.5)$, $p(0.8)$, $p(1.2)$ y $p(1.5)$, donde

$$p(t) := (1 - t)a + tb.$$

Ejercicio 2. *10 %.*
En los espacios normados, la frontera de la bola abierta es la esfera con el mismo radio. Sean V un espacio normado complejo, $a \in V$, $r > 0$. Demostrar de manera directa que

$$\operatorname{fr}(B(a, r)) = S(a, r).$$

Indicaciones. En la solución de este problema no está permitido usar el resultado sobre la cerradura de la bola abierta. Aceptar sin demostración y utilizar la siguiente descripción de la frontera:

$$x \in \operatorname{fr}(A) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \Big(\exists y \in A \cap B(x, \varepsilon) \quad \wedge \quad \exists z \in B(x, \varepsilon) \setminus A\Big).$$

En una parte de la demostración se requiere **construir** los puntos y, z de esta descripción.

Ejercicio 3. *5 %.*
Operaciones lineales con conjuntos en espacios vectoriales. Sea V un espacio vectorial complejo. Sean $A, B \subseteq V$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Demostrar que

$$\lambda(A + B) = (\lambda A) + (\lambda B).$$

Ejercicio 4. *6 %.*
Los conjuntos abiertos desplazados y dilatados en espacios normados. Sea V un espacio normado complejo, sea $A \subseteq V$ un subconjunto abierto de V y sean $b \in V$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostrar que el conjunto $C := \lambda A + b$ es abierto. Indicación: escribir una demostración directa, trabajando con bolas.

Ejercicio 5. *10 %.*
Convergencia en espacios de sucesiones, ejemplo. En el espacio ℓ^1 consideremos la sucesión $x = (x^m)_{m\in\mathbb{N}}$, definida mediante la siguiente regla:

$$x^m := \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} e_k = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{m}, 0, 0, \ldots\right).$$

Determinar si esta sucesión tiene un límite en ℓ^1. Justificar bien la respuesta.

Ejercicio 6. *5 %.*
Expresión recursiva para las combinaciones convexas. Sea V un espacio vectorial real o complejo, sea $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ y sea $v \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m)$. Construir u en $\operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_{m-1})$ tal que $v \in \operatorname{conv}(u, a_m)$.

Ejercicio 7. *5 %.*
Envolturas convexas. Sea V un espacio vectorial real o complejo y sea $A \subseteq V$. Supongamos que $\operatorname{conv}_2(A) \subseteq A$. Demostrar que $\operatorname{conv}_m(A) \subseteq A$ para cada m en $\mathbb{N}$. Sugerencia: usar el resultado del ejercicio anterior.

Ejercicio 8. *5 %.*
Cada semiespacio real es un conjunto convexo. Sea V un espacio normado complejo, sea $\varphi\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal continuo y sea $c \in \mathbb{R}$. Pongamos

$$A := \Big\{x \in V\colon\ \ \operatorname{Re}(\varphi(x)) \leqslant c\Big\}.$$

Demostrar que el conjunto A es convexo.

Ejercicio 9. *7 %.*
Las vecindades de los conjuntos en los espacios normados. Sea V un espacio normado complejo y sea $A \subseteq V$.

I. Dado $\varepsilon > 0$, demostar que

$$\big\{v \in V\colon\ d(v, A) < \varepsilon\big\} = A + \varepsilon B(0_V, 1).$$

II. Demostrar que

$$\operatorname{cl}(A) = \bigcap_{\varepsilon>0} \big(A + \varepsilon B(0_V, 1)\big).$$

Ejercicio 10. *7 %.*
El interior del conjunto convexo es un conjunto convexo. Sea V un espacio normado complejo y sea $A \subseteq V$. Supongamos que A es convexo. Demostrar que $\operatorname{int}(A)$ es convexo. Si esta afirmación no es correcta, construir un contraejemplo.

Ejercicio 11. *5 %.*
Ejemplo de normas equivalentes. En el espacio $\mathbb{C}^2$ consideremos la norma

$$N(a) := \sup_{t\in[0,1]} \big|a_0 + a_1 t\big|.$$

Demostrar de manera explícita que las normas N y $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{C}^2$ son equivalentes. En otras palabras, encontrar $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$ tales que para cada a en $\mathbb{C}^2$

$$N(a) \leqslant C_1 \|a\|_\infty, \qquad \|a\|_\infty \leqslant C_2 N(a).$$

Ejercicio 12. *8 %.*
Ejemplo de normas no equivalentes. Denotemos por V el espacio vectorial de todas las funciones polinomiales con coeficientes complejos, definidas en el dominio $[0,1]$. En el espacio V consideremos las normas

$$\|f\|_{\sup} \coloneqq \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \qquad (f \in V),$$

$$P(f) \coloneqq \sum_{k=0}^{m} |c_k| \qquad \left(f \in V, \quad f(t) = \sum_{k=0}^{m} c_k t^k \right).$$

Demostrar que las normas $\|\cdot\|_{\sup}$ y P no son equivalentes. Sugerencia: considerar las funciones

$$g_m(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^k}{k}\, t^k.$$

Ejercicio 13. *8 %.*
La esfera unitaria en el espacio de funciones de variación acotada no es separable. Consideramos el espacio $V = \mathrm{BV}([0,2])$ con la norma

$$\|f\|_{\mathrm{BV}} \coloneqq \|f\|_{\sup} + \mathrm{Var}_0^2(f).$$

Construir de manera explícita una familia $(g_t)_{t\in[0,1]}$ en V tal que $\|g_t\|_{\mathrm{BV}} = 1$ para cada t en $[0,1]$ y

$$\forall t, u \in [0,1] \qquad \Big(t \neq u \qquad \Longrightarrow \qquad \|g_t - g_u\|_{\mathrm{BV}} \geqslant 1 \Big).$$

Sugerencia: se pueden construir funciones constantes a trozos. Dibujar las gráficas de g_t, g_u y $g_t - g_u$ para $t = 1/5$ y $u = 2/5$.

Ejercicio 14. *5 %.*
El espacio normado de las funciones continuas que tienden a cero en el infinito. Sea X un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto. Denotamos por $C_0(X)$ el conjunto de las funciones $X \to \mathbb{C}$ que son continuas en X y "tienden a cero en el infinito":

$$C_0(X) \coloneqq \Big\{ f \in C(X,\mathbb{C}) \colon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \subseteq X \quad \big(K \text{ es compacto} \quad \wedge \quad \sup_{x\in X\setminus K} |f(x)| < \varepsilon \big) \Big\}.$$

I. Verificar que $C_0(X) \subseteq B(X)$.

II. Verificar que $C_0(X)$ es un subespacio vectorial de $B(X)$. Este espacio se considera con la norma-supremo $\|\cdot\|_{\sup}$.

Ejercicio 15. *7 %.*
Completez del espacio de las funciones continuas que tienden a cero en el infinito. Demostrar que $C_0(X)$ es un subespacio cerrado de $C_b(X)$.

Ejercicio 16. *8 %.*
Subespacios densos y no densos.

I. Sea V un espacio normado complejo y sea W un subespacio vectorial de V tal que $W \neq V$ y $\dim(W) = n$. Demostrar que W es cerrado (se puede usar algún resultado demostrado en el curso) y concluir que $\operatorname{cl}(W) \neq V$.

II. Encontrar un espacio normado complejo V y un subespacio vectorial W de V tales que $W \neq V$, pero $\operatorname{cl}(W) = V$.

Ejercicio 17. *6 %.*
Ejemplo de cálculo de la norma en el espacio cociente $\mathbb{R}^2/W$. En el espacio $V = \mathbb{R}^2$ con la norma euclidiana consideremos el subespacio $W = \ell(a)$, donde

$$a = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Sea $x = [x_1, x_2]^\top$ en $\mathbb{R}^2$. Consideremos la función $f_x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_x(\lambda) := \|x + \lambda a\|^2$. Calcular el valor mínimo de esta función usando la derivada.
II. Sea $x = [x_1, x_2]^\top$. Calcular la norma del elemento $x + W$ del espacio cociente V/W.

Ejercicio 18. *7 %.*
Continuidad de la transformación lineal, cuyo dominio es $\mathbb{C}^n$ y cuyo codominio es un espacio normado. Sea W un espacio normado y sea $T \colon \mathbb{C}^n \to W$ una transformación lineal. Demostrar que T es continua.

Análisis Funcional.
Tarea "Espacios normados".
Variante 1.

Bolas en espacios normados, desplazamientos y dilataciones en espacios normados, propiedades de operaciones con conjuntos en espacios vectoriales, conjuntos convexos, cerraduras y subespacios, continuidad de operaciones lineales en espacios normados, propiedades de subespacios en espacios normados, el cociente de espacios normados o seminormados, ejemplos de bolas unitarias no totalmente acotadas.

Ejercicio 1. *3 %.*
Ejemplos de puntos pertenecientes a un segmento. Sea X el espacio normado $\mathbb{R}^2$ con la norma euclidiana. Sean $a_1 = (-3, -1)$, $a_2 = (4, -2)$, $r_1 = 6$, $r_2 = 2$. Dibujar las bolas $B(a_1, r_1)$ y $B(a_2, r_2)$. Dibujar el segmento que une los puntos a_1 y a_2. Marcar los puntos $p(1/10)$, $p(1/2)$, $p(3/4)$ y $p(9/10)$, donde

$$p(t) := (1 - t)a_1 + ta_2.$$

Ejercicio 2. *10 %.*
En los espacios normados, si la distancia entre los centros de dos bolas es menor que la suma de los radios, entonces las bolas intersectan. Sean V un espacio normado complejo, $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$d(a_1, a_2) < r_1 + r_2.$$

Construir un punto en $B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2)$ como una combinación convexa de los puntos a_1 y a_2.

Ejercicio 3. *5 %.*
Operaciones lineales con conjuntos en espacios vectoriales. Sea V un espacio vectorial complejo. Sean $A \subseteq V$, $\xi, \eta \in \mathbb{C}$. Demostrar que

$$(\xi + \eta)A \subseteq (\xi A) + (\eta A).$$

Suponiendo que $V \neq \{0_V\}$ construir un ejemplo tal que $2A \neq A + A$.

Ejercicio 4. *6 %.*
La suma de dos series convergentes en espacios normados. Sea V un espacio normado complejo y sean $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones con valores en V tales que convergen las series

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_n.$$

Demostrar que la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ también converge, y

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_n + \sum_{k=1}^{\infty} b_n.$$

Indicación: introducir la notación para las sumas parciales de las dos series originales y para sus límites.

Ejercicio 5. *10 %.*
Convergencia en espacios de sucesiones, ejemplo. En el espacio ℓ^2 consideremos la sucesión $x = (x^m)_{m\in\mathbb{N}}$, definida mediante la siguiente regla:

$$x^m := \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} e_k = \left(1,\ \frac{1}{2},\ \ldots,\ \frac{1}{m},\ 0,\ 0,\ \ldots\right).$$

Determinar si esta sucesión tiene un límite en ℓ^2. Justificar bien la respuesta.

Ejercicio 6. *5 %.*
La envoltura convexa de una lista de vectores incluye a los vectores originales. Sea V un espacio vectorial real o complejo, sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ y sea $p \in \{1, \ldots, m\}$. Demostrar que $a_p \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m)$.

Ejercicio 7. *5 %.*
Envolturas convexas. Sea V un espacio vectorial real o complejo y sea $A \subseteq V$. Demostrar que $A = \operatorname{conv}_1(A)$ y $\operatorname{conv}_1(A) \subseteq \operatorname{conv}(A)$.

Ejercicio 8. *5 %.*
La suma de dos conjuntos convexos es convexa. Sea V un espacio normado complejo y sean $P, Q \subseteq V$ conjuntos convexos. Demostrar que $P + Q$ es convexo.

Ejercicio 9. *7 %.*
La suma del conjunto abierto con el conjunto arbitrario es un conjunto abierto. Sea V un espacio normado y sean P, Q subconjuntos de V. Supongamos que P es abierto. Demostrar que $P + Q$ es abierto.

Ejercicio 10. *7 %.*
La envoltura convexa del conjunto cerrado no necesariamente es cerrada. Encontrar un espacio normado V y un conjunto $A \subseteq V$ cerrado tales que su envoltura convexa $\operatorname{conv}(A)$ no sea cerrada.

Ejercicio 11. *5 %.*
Ejemplo de normas equivalentes. Sean V_1, V_2 espacios normados complejos. En el espacio vectorial $V_1 \oplus V_2$ consideremos dos normas:

$$\|(x, y)\|_{V_1\oplus V_2,1} := \|x\|_{V_1} + \|y\|_{V_2}, \qquad \|(x, y)\|_{V_1\oplus V_2,2} := \sqrt{\|x\|_{V_1}^2 + \|y\|_{V_2}^2}.$$

Demostrar de manera explícita que estas dos normas son equivalentes. En otras palabras, encontrar $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$ tales que para cada (x, y) en $V_1 \oplus V_2$

$$\|(x, y)\|_{V_1\oplus V_2,1} \leqslant C_1 \|(x, y)\|_{V_1\oplus V_2,2}, \qquad \|(x, y)\|_{V_1\oplus V_2,2} \leqslant C_2 \|(x, y)\|_{V_1\oplus V_2,1}.$$

Ejercicio 12. *8 %.*
Ejemplo de normas no equivalentes. Demostrar que las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en el espacio ℓ^1 no son equivalentes. Sugerencia: para cada $M > 0$ encontrar a en ℓ^1 tal que

$$\|a\|_1 > M\|a\|_2.$$

Ejercicio 13. *8 %.*
La esfera unitaria en el espacio de funciones absolutamente continuas no es totalmente acotada. Consideramos el espacio $V = \mathrm{AC}([0,1])$ con la norma

$$\|f\|_{\mathrm{AC}} \coloneqq \|f\|_{\sup} + \int_0^1 |f'|.$$

Construir de manera explícita una sucesión $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ en V tal que $\|g_m\|_{\mathrm{AC}} = 1$ para cada g en $\mathbb{N}$ y

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \qquad \Big(m \neq n \qquad \Longrightarrow \qquad \|g_m - g_n\|_{\mathrm{AC}} \geqslant 1\Big).$$

Dibujar las gráficas de g_2, g_5 y $g_2 - g_5$.

Ejercicio 14. *5 %.*
El espacio normado de las funciones acotadas Lipschitz continuas. Sea X un espacio métrico. Definimos $\varphi\colon \mathbb{C}^X \to [0, +\infty]$,

$$\varphi(f) \coloneqq \sup_{\substack{x,y\in X\\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)}.$$

Demostrar que φ es una seminorma extendida. Pongamos

$$\mathrm{Lip}(X) \coloneqq \Big\{f \in B(X)\colon \quad \varphi(f) < +\infty\Big\}.$$

Mostrar que $\mathrm{Lip}(X)$ es un subespacio vectorial de $B(X)$. Definimos $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}\colon \mathrm{Lip}(X) \to [0, +\infty)$,

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} \coloneqq \|f\|_{\sup} + \varphi(f).$$

Demostrar que $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ es una norma.

Ejercicio 15. *7 %.*
Completez del espacio de las funciones acotadas Lipschitz continuas. Sea X un espacio métrico. Demostrar que el espacio $\mathrm{Lip}(X)$ con la norma $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ es completo.

Ejercicio 16. *8 %.*
Cada subespacio del espacio normado tiene interior vacío o coincide con el espacio total. Sea V un espacio normado complejo y sea W un subespacio de V. Supongamos que $\operatorname{int}(W) \neq \emptyset$. Demostrar que $W = V$.

Ejercicio 17. *6 %.*
Ejemplo de cálculo de la norma en el espacio cociente $\mathbb{R}^2/W$. En el espacio $V = \mathbb{R}^2$ con la norma euclidiana consideremos el subespacio $W = \ell(a)$, donde

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

I. Sea $x = [x_1, x_2]^\top$ en $\mathbb{R}^2$. Consideremos la función $f_x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_x(\lambda) := \|x + \lambda a\|^2$. Calcular el valor mínimo de esta función usando la derivada.
II. Sea $x = [x_1, x_2]^\top$. Calcular la norma del elemento $x + W$ del espacio cociente V/W.

Ejercicio 18. *7 %.*
Cada espacio normado de dimensión finita es completo. Sea V un espacio normado de dimensión finita. Demostrar que V es de Banach. Sugerencia: se pueden usar la completez del espacio métrico $\mathbb{C}^n$ y el hecho que cualesquiera dos normas en $\mathbb{C}^n$ son equivalentes.

Análisis Funcional.
Tarea “Espacios normados”.
Variante 2.

Bolas en espacios normados, desplazamientos y dilataciones en espacios normados, propiedades de operaciones con conjuntos en espacios vectoriales, conjuntos convexos, cerraduras y subespacios, continuidad de operaciones lineales en espacios normados, propiedades de subespacios en espacios normados, el cociente de espacios normados o seminormados, ejemplos de bolas unitarias no totalmente acotadas.

Ejercicio 1. *3 %.*
Ejemplos de puntos pertenecientes a un rayo. Sea X el espacio normado $\mathbb{R}^2$ con la norma euclidiana. Sean $a_1 = (-2, 1)$, $a_2 = (3, -2)$, $r_1 = 2$, $r_2 = 6$. Dibujar las bolas $B(a_1, r_1)$ y $B(a_2, r_2)$. Dibujar un trozo del rayo que inicia en a_2 y pasa por a_1. En este rayo marcar los puntos $p(0.5)$, $p(0.9)$, $p(1.1)$ y $p(1.3)$, donde

$$p(t) := (1 - t)a_2 + ta_1.$$

Ejercicio 2. *10 %.*
En los espacios normados, el diámetro de la bola es su radio doble. Sean V un espacio normado complejo, $V \neq \{0_V\}$, $a \in V$, $r > 0$. Demostrar que

$$\operatorname{diam}(B(a, r)) = 2r.$$

Sugerencia. Para cada ε con $0 < \varepsilon < r$ se recomienda **construir** p, q en $B(a, r)$ tales que $\|p - q\| = 2r - \varepsilon$.

Ejercicio 3. *5 %.*
Operaciones lineales con conjuntos en espacios vectoriales. Sea V un espacio vectorial complejo y sea $A \subseteq V$. Supongamos que A es convexo. Demostrar que el conjunto $A - A$ también es convexo.

Ejercicio 4. *6 %.*
Los conjuntos cerrados desplazados y dilatados en espacios normados. Sea V un espacio normado complejo, sea $A \subseteq V$ un subconjunto cerrado de V y sean $b \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Demostrar que el conjunto $C := \lambda A + b$ es cerrado. Indicación: hacer una demostración directa, trabajando con puntos de adherencia por medio de bolas.

Ejercicio 5. *10 %.*
Convergencia en espacios de sucesiones, ejemplo. En el espacio ℓ^∞ consideremos la sucesión $x = (x^m)_{m\in\mathbb{N}}$, definida mediante la siguiente regla:

$$x^m := \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} e_k = \left(1,\ \frac{1}{2},\ \ldots,\ \frac{1}{m},\ 0,\ 0,\ \ldots\right).$$

Determinar si esta sucesión tiene un límite en ℓ^∞. Justificar bien la respuesta.

Ejercicio 6. *5 %.*
La intersección de las medianas de un triángulo en términos de combinaciones convexas. Sea V un espacio vectorial real y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Denotemos por L_1 el lado del triángulo opuesto al vértice a_1, esto es, $L_1 := \operatorname{conv}(a_2, a_3)$. Sea b_1 el centro del segmento L_1, esto es, el punto medio entre a_2 y a_3. Sea M_1 la mediana que conecta los puntos a_1 y b_1, esto es, $M_1 := \operatorname{conv}(a_1, b_1)$. De manera similar definimos L_2, b_2, M_2, L_3, b_3, M_3. Demostrar de manera algebraica que

$$M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \{c\}, \qquad \text{donde} \qquad c := \frac{1}{3}\Big(a_1 + a_2 + a_3\Big).$$

Ejercicio 7. *5 %.*
Envolturas convexas. Sea V un espacio vectorial real o complejo y sea $A \subseteq V$. Demostrar que $\operatorname{conv}_m(A) \subseteq \operatorname{conv}_{m+1}(A)$ para cada m en $\mathbb{N}$.

Ejercicio 8. *5 %.*
El epigrafo de cada función convexa es un conjunto convexo. Sea V un espacio vectorial real o complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{R}$ una función convexa. Denotemos por E el epigrafo de f:

$$E := \big\{(x, \alpha) \in V \times \mathbb{R}: \quad \alpha \geqslant f(x)\big\}.$$

Demostrar que E es un subconjunto convexo del espacio vectorial $V \times \mathbb{R}$.

Ejercicio 9. *7 %.*
La suma de dos conjuntos cerrados en un espacio normado puede no ser cerrada. En el espacio $\mathbb{C}$ encontrar dos subconjuntos cerrados X, Y tales que el conjunto $X + Y$ no sea cerrado.

Ejercicio 10. *7 %.*
La envoltura convexa del conjunto abierto es abierta. Sea V un espacio normado complejo y sea $A \subseteq V$ tal que A es abierto. Demostrar que el conjunto $\operatorname{conv}(A)$ es abierto.

Ejercicio 11. *5 %.*
Ejemplo de normas equivalentes. Sea $\rho \in C([0,1], [0, +\infty))$. Consideramos el espacio vectorial $V := C([0,1], \mathbb{C})$. Denotamos por N la siguiente norma en V:

$$N(f) := \sup_{x\in[0,1]} |\rho(x) f(x)|.$$

Supongamos que $c := \inf_{x\in X} \rho(x) > 0$. Demostrar de manera explícita que las normas N y $\|\cdot\|_{\sup}$ son equivalentes. En otras palabras, encontrar $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$ tales que para cada f en V

$$N(f) \leqslant C_1 \|f\|_{\sup}, \qquad \|f\|_{\sup} \leqslant C_2 N(f).$$

Ejercicio 12. *8 %.*
Ejemplo de normas no equivalentes. Consideramos el espacio vectorial $V := C([0,1],\mathbb{C})$. Definimos $P\colon V \to [0,+\infty)$,

$$P(f) := \sup_{x\in[0,1]} |x\, f(x)|.$$

I. Demostrar que si $f \in V$ y $P(f) = 0$, entonces $f = 0_{[0,1]}$. Es obvio que P es subaditiva y absolutamente homogénea, por eso podremos concluir que P es una norma. (las demás .

II. Demostrar que las normas P y $\|\cdot\|_{\sup}$ no son equivalentes. Sugerencia: para cada $M > 0$ encontrar f en V tal que

$$\|f\|_{\sup} > M\, P(f).$$

Ejercicio 13. *8 %.*
La esfera unitaria en el espacio de funciones continuas no es totalmente acotada. Consideramos el espacio $V = C([0,1])$ con la norma-supremo. Construir de manera explícita una sucesión $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ en V tal que $\|g_m\|_{\sup} = 1$ para cada g en $\mathbb{N}$ y

$$\forall m,n\in\mathbb{N} \qquad \Big(m \neq n \qquad \Longrightarrow \qquad \|g_m - g_n\|_{\sup} \geqslant 1\Big).$$

Dibujar las gráficas de g_2, g_5 y $g_2 - g_5$.

Ejercicio 14. *5 %.*
El espacio normado de las funciones de variación acotada. Sean $a,b\in\mathbb{R}$, $a < b$. Denotamos por $\mathcal{P}(a,b)$ al conjunto de las "particiones" del segmento $[a,b]$, en el mismo sentido que se usa en la construcción de la integral de Riemann:

$$\mathcal{P}(a,b) := \Big\{\tau = (\tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_m)\colon \quad m\in\mathbb{N}, \quad a = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_m = b\Big\}.$$

Para cada $f\colon [a,b]\to\mathbb{C}$ y cada $\tau = (\tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_m)$ en $\mathcal{P}(a,b)$ pongamos

$$S_{\mathrm{abs}}(f,\tau) := \sum_{k=1}^{m} |f(\tau_k) - f(\tau_{k-1})|.$$

Para cada $f\colon [a,b]\to\mathbb{C}$ pongamos $\mathrm{Var}_a^b(f) := \sup_{\tau\in\mathcal{P}(a,b)} S_{\mathrm{abs}}(f,\tau)$. Demostrar que Var_a^b es una seminorma extendida. Mostrar que si $\mathrm{Var}_a^b(f) < +\infty$, entonces f es acotada. Mostrar que el conjunto

$$\mathrm{BV}(a,b) := \big\{f\in\mathbb{C}^{[a,b]}\colon \quad \mathrm{Var}_a^b(f) < +\infty\big\}$$

es un subespacio vectorial de $B([a,b])$. Definimos $\|\cdot\|_{\mathrm{BV}}\colon \mathrm{BV}([a,b]) \to [0,+\infty)$,

$$\|f\|_{\mathrm{BV}} := \mathrm{Var}_a^b(f) + \|f\|_{\sup}.$$

Demostrar que $\|\cdot\|_{\mathrm{BV}}$ es una norma.

Ejercicio 15. *7 %.*
Completez del espacio de las funciones de variación acotada. Sean $a,b\in\mathbb{R}$, $a < b$. Demostrar que el espacio $\mathrm{BV}([a,b])$ con la norma $\|\cdot\|_{\mathrm{BV}}$ es completo.

Ejercicio 16. *8 %.*
La suma de dos subespacios cerrados no siempre es cerrada. En el espacio ℓ^2 consideremos los siguientes dos subespacios:

$$S_1 = \left\{ x \in \ell^2(\mathbb{N}) \colon \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad x_{2j} = 0 \right\}, \qquad S_2 = \left\{ x \in \ell^2(\mathbb{N}) \colon \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad x_{2j} = \frac{x_{2j-1}}{j} \right\}.$$

I. Representar S_1 y S_2 como intersecciones de los núcleos de ciertos funcionales linales acotados definidos en ℓ^2.

II. Demostrar que S_1 y S_2 son cerrados.

III. Demostrar que $e_{2m-1} \in S_1$ y $e_{2m-1} + \frac{e_{2m}}{m} \in S_2$ para cada m en $\mathbb{N}$.

IV. Demostrar que $e_{2m-1} \in S_1 + S_2$ y $e_{2m} \in S_1 + S_2$ para cada m en $\mathbb{N}$.

V. Demostrar que $\mathrm{cl}(S_1 + S_2) = \ell^2$.

VI. Demostrar que la sucesión $u = (0, 1, 0, 1/2, 0, 1/3, \ldots)$ no pertenece al subespacio $S_1 + S_2$.

Ejercicio 17. *6 %.*
Ejemplo de cálculo de la norma en el espacio cociente $\mathbb{R}^2/W$. En el espacio $V = \mathbb{R}^2$ con la norma euclidiana consideremos el subespacio $W = \ell(a)$, donde

$$a = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

I. Sea $x = [x_1, x_2]^\top$ en $\mathbb{R}^2$. Consideremos la función $f_x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_x(\lambda) := \|x + \lambda a\|^2$. Calcular el valor mínimo de esta función usando la derivada.

II. Sea $x = [x_1, x_2]^\top$. Calcular la norma del elemento $x + W$ del espacio cociente V/W.

Ejercicio 18. *7 %.*
Las distancias al origen en el espacio $\mathbb{C}^n$ se alcanzan. Sea A un subconjunto cerrado de $\mathbb{C}^n$. Demostrar que existe u en A tal que $\|u\| = d(0_V, A)$, es decir,

$$\|u\| = \inf_{a \in A} \|a\|.$$

Sugerencia: usar el hecho que los conjuntos acotados cerrados en $\mathbb{C}^n$ son compactos.

Análisis Funcional.
Tarea “Espacios normados”.
Variante 3.

Bolas en espacios normados, desplazamientos y dilataciones en espacios normados, propiedades de operaciones con conjuntos en espacios vectoriales, conjuntos convexos, cerraduras y subespacios, continuidad de operaciones lineales en espacios normados, propiedades de subespacios en espacios normados, el cociente de espacios normados o seminormados, ejemplos de bolas unitarias no totalmente acotadas.

Ejercicio 1. *3 %.*
Ejemplos de puntos pertenecientes a un rayo. Sea X el espacio normado $\mathbb{R}^2$ con la norma euclidiana. Sean $a = (-1, -1)$, $b = (2, -3)$, $r = \|b - a\|$. Dibujar la bola $B(a, r)$. Dibujar un trozo del rayo que inicia en a y pasa por b. En este rayo marcar los puntos $p(0.5)$, $p(0.8)$, $p(1.2)$ y $p(1.5)$, donde

$$p(t) := (1 - t)a + tb.$$

Ejercicio 2. *10 %.*
En los espacios normados, el interior de la bola cerrada es la bola abierta del mismo radio. Sean V un espacio normado complejo, $a \in V$, $r_1 > 0$. Demostrar que

$$\operatorname{int}(\overline{B}(a, r)) = B(a, r).$$

Sugerencia: en una parte de demostración se recomienda considerar los puntos de un rayo que inicia en a.

Ejercicio 3. *5 %.*
Operaciones lineales con conjuntos en espacios vectoriales. Sea V un espacio vectorial complejo. Sean $A \subseteq V$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $b \in V$. Supongamos que A es convexo. Demostrar que el conjunto $C := \lambda A + b$ también es convexo.

Ejercicio 4. *6 %.*
La continuidad de la multiplicación por escalares en el lenguaje de sucesiones. Sea V un espacio normado complejo, sean $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V, $\xi = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$, $b \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$. Supongamos que $a \to b$ y $\xi \to \eta$, esto es,

$$\lim_{k\to\infty} a_k = b, \qquad \lim_{k\to\infty} \xi_k = \eta.$$

Demostrar de manera directa que $\xi a \to \eta b$, esto es,

$$\lim_{k\to\infty} (\xi_k a_k) = \eta b.$$

Sugerencia: trabajar con propiedades de la norma o hacer operaciones lineales con bolas.

Ejercicio 5. *10 %.*
Convergencia en espacios de sucesiones, ejemplo. En el espacio ℓ^1 consideremos la sucesión $x = (x^m)_{m\in\mathbb{N}}$, definida mediante la siguiente regla:

$$x^m := \sum_{k=1}^{m} e_k = \Big(\underbrace{1, \ldots, 1}_{m}, 0, 0, \ldots\Big).$$

Determinar si esta sucesión tiene un límite en ℓ^1. Justificar bien la respuesta.

Ejercicio 6. *5 %.*
Las combinaciones convexas de combinaciones convexas son combinaciones convexas, ejemplo. Sea V un espacio vectorial real o complejo y sean $a_1, \ldots, a_7 \in V$. Supongamos que $s \in \operatorname{conv}(a_1, a_2, a_3, a_4)$, $t \in \operatorname{conv}(a_5, a_6, a_7)$ y $r \in \operatorname{conv}(s, t)$. Mostrar que $r \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_7)$.

Ejercicio 7. *5 %.*
Envolturas convexas. Sea V un espacio vectorial real o complejo y sea $A \subseteq V$. Sean $p, q \in \mathbb{N}$, $u \in \operatorname{conv}_p(A)$, $v \in \operatorname{conv}_q(A)$, $w \in \operatorname{conv}(u, v)$. Demostrar que $w \in \operatorname{conv}_{p+q}(A)$.

Ejercicio 8. *5 %.*
El cubo de Hilbert es convexo. En el espacio ℓ^2 consideremos el conjunto

$$A := \left\{ a \in \ell^2 : \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant a_k \leqslant \frac{1}{k} \right\}.$$

Este conjunto se conoce como el "cubo de Hilbert" o el "ladrillo de Hilbert". Demostrar que A es convexo.

Ejercicio 9. *7 %.*
La suma del conjunto cerrado con el conjunto compacto es un conjunto cerrado. Sea V un espacio normado complejo y sean $P, Q \subseteq V$ tales que P es cerrado y Q es compacto. Demostrar que $P + Q$ es cerrado.

Ejercicio 10. *7 %.*
La envoltura convexa del conjunto acotado es un conjunto acotado. Sea V un espacio normado complejo y sea A un subconjunto acotado de V. Demostrar que $\operatorname{conv}(A)$ también es acotado.

Ejercicio 11. *5 %.*
Ejemplo de normas equivalentes. En el espacio $\operatorname{Lip}([0, 1])$ consideremos dos normas:

$$N_1(f) := \|f\|_{\sup} + Q(f), \qquad N_2(f) := |f(0)| + Q(f),$$

donde

$$Q(f) := \sup_{\substack{x,y\in[0,1]\\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

Demostrar de manera explícita que las normas N_1 y N_2 son equivalentes. En otras palabras, encontrar $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$ tales que para cada f en $\operatorname{Lip}([0, 1])$

$$N_1(f) \leqslant C_1 N_2(f), \qquad N_2(f) \leqslant C_2 N_1(f).$$

Ejercicio 12. *8 %.*
Ejemplo de normas no equivalentes. En el espacio Lip($[0,1]$) consideremos la norma $\|\cdot\|_{\sup}$ y la norma

$$N_1(f) := \|f\|_{\sup} + Q(f),$$

donde

$$Q(f) := \sup_{\substack{x,y\in[0,1]\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}.$$

Demostrar que las normas $\|\cdot\|_{\sup}$ y N_1 no son equivalentes. Sugerencia: para cada $M>0$ encontrar f en Lip($[0,1]$) tal que

$$N_1(f) > M\,\|f\|_{\sup}.$$

Ejercicio 13. *8 %.*
La esfera unitaria en el espacio $L^2([0,1])$ no es totalmente acotada. Consideramos el espacio $V = L^2([0,1])$, donde $[0,1]$ está provisto de la medida de Lebesgue. Construir de manera explícita una sucesión $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ en V tal que $\|g_m\|_2 = 1$ para cada g en $\mathbb{N}$ y

$$\forall m,n\in\mathbb{N} \qquad \Big(m\neq n \qquad \Longrightarrow \qquad \|g_m - g_n\|_2 \geqslant 1\Big).$$

Dibujar las gráficas de g_2, g_5 y $g_2 - g_5$.

Ejercicio 14. *5 %.*
El espacio normado de las funciones absolutamente continuas. Sean $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Denotamos por AC($[a,b]$) al conjunto de las funciones complejas absolutamente continuas definidas en $[a,b]$. Se sabe que

$$f\in \mathrm{AC}([a,b]) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists g\in L^1([a,b]) \quad \forall x\in[a,b] \quad f(x) = f(a) + \int_{[a,b]} g.$$

I. Demostrar que si f y g son como funciones en esta condición y f es una constante, entonces $\|g\|_1 = 0$.
II. Demostrar que AC($[a,b]$) $\subseteq B([a,b])$.
III. Demostrar que AC($[a,b]$) es un subespacio vectorial de $B([a,b])$.
IV. Para cada f en AC($[a,b]$) encontramos g como arriba y pongamos

$$\varphi(f) := \|g\|_1.$$

Mostrar que φ es una seminorma.
V. Definimos $\|\cdot\|_{\mathrm{AC}}\colon \mathrm{AC}([a,b]) \to [0,+\infty)$,

$$\|f\|_{\mathrm{AC}} := \varphi(f) + \|f\|_{\sup}.$$

Mostrar que $\|\cdot\|_{\mathrm{AC}}$ es una norma.

Ejercicio 15. *7 %.*
Completez del espacio de las funciones absolutamente continuas. Sean $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Demostrar que el espacio AC($[a,b]$) con la norma $\|\cdot\|_{\mathrm{AC}}$ es completo. Sugerencia: usar la completez del espacio $L^1([a,b])$.

Ejercicio 16. *8 %.*
Ejemplos de subespacios. En el espacio $\ell^1(\mathbb{N})$ construir dos subespacios cerrados W_1 y W_2 tales que $\ell^1(\mathbb{N}) = W_1 + W_2$ y que ninguno de estos subespacios sea de dimensión finita. Justificar bien todas las propiedades mencionadas.

Ejercicio 17. *6 %.*
Ejemplo de cálculo de la norma en el espacio cociente $\mathbb{R}^2/W$. En el espacio $V = \mathbb{R}^2$ con la norma euclidiana consideremos el subespacio $W = \ell(a)$, donde

$$a = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

I. Sea $x = [x_1, x_2]^\top$ en $\mathbb{R}^2$. Consideremos la función $f_x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_x(\lambda) := \|x + \lambda a\|^2$. Calcular el valor mínimo de esta función usando la derivada.
II. Sea $x = [x_1, x_2]^\top$. Calcular la norma del elemento $x + W$ del espacio cociente V/W.

Ejercicio 18. *7 %.*
Los cubos de dimensión finita son totalmente acotados. En el espacio $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidiana consideremos el cubo $A = [0, 1]^n$. Sea $\varepsilon > 0$. Construir en A una ε-red finita.

Análisis Funcional.
Tarea "Espacios normados".
Variante 4.

Bolas en espacios normados, desplazamientos y dilataciones en espacios normados, propiedades de operaciones con conjuntos en espacios vectoriales, conjuntos convexos, cerraduras y subespacios, continuidad de operaciones lineales en espacios normados, propiedades de subespacios en espacios normados, el cociente de espacios normados o seminormados, ejemplos de bolas unitarias no totalmente acotadas.

Ejercicio 1. *3 %.*
Ejemplos de puntos pertenecientes a un segmento. Sea X el espacio normado $\mathbb{R}^2$ con la norma euclidiana. Sean $a_1 = (-2, 1)$, $a_2 = (4, -2)$, $r_1 = 2$, $r_2 = 6$. Dibujar las bolas $B(a_1, r_1)$ y $B(a_2, r_2)$. Dibujar el segmento que une los puntos a_1 y a_2. Marcar los puntos $p(1/10)$, $p(1/4)$, $p(1/2)$, $p(3/4)$ y $p(9/10)$, donde

$$p(t) \coloneqq (1 - t)a_1 + ta_2.$$

Ejercicio 2. *10 %.*
En los espacios normados, la cerradura de la bola abierta es la bola cerrada del mismo radio. Sean V un espacio normado complejo, $a \in V$, $r_1 > 0$. Demostrar que

$$\mathrm{cl}(B(a, r)) = \overline{B}(a, r).$$

Sugerencia: en una parte de demostración se recomienda considerar los puntos de un rayo que inicia en a.

Ejercicio 3. *5 %.*
Operaciones lineales con conjuntos en espacios vectoriales. Sea V un espacio vectorial complejo y sean $P, Q \subseteq V$ subconjuntos convexos de V. Demostrar que el conjunto $P + Q$ también es convexo.

Ejercicio 4. *6 %.*
Las traslaciones y dilataciones no nulas son homeomorfismos. Sea V un espacio normado complejo. Para cada b en V y cada λ en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, definimos $T_{b,\lambda}\colon V \to V$ mediante la regla $T(x) \coloneqq \lambda x + b$.

I. Sean $b \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Demostrar de manera directa que $T_{b,\lambda}$ es continua en cada punto. Indicación: trabajar con bolas.

II. Sean $b \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Encontrar la función U inversa a la función $T_{b,\lambda}$. Hay que dar una fórmula para U y verificar que $U \circ T_{b,\lambda} = I_V$ $T_{b,\lambda} \circ U = I_V$.

III. Sean $b \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Demostrar que $T_{b,\lambda}$ es un homeomorfismo.

Ejercicio 5. *10 %.*
Convergencia en espacios de sucesiones, ejemplo. En el espacio c_0 consideremos la sucesión $x = (x^m)_{m\in\mathbb{N}}$, definida mediante la siguiente regla:

$$x^m := \sum_{k=1}^{m} e_k = \Big(\underbrace{1, \ldots, 1}_{m}, 0, 0, \ldots\Big).$$

Determinar si esta sucesión tiene un límite en c_0. Justificar bien la respuesta.

Ejercicio 6. *5 %.*
Las combinaciones convexas de cuatro vectores en términos de combinaciones convexas de tres vectores. Sea V un espacio vectorial real o complejo y sean $a_1, a_2, a_3, a_4 \in V$. Supongamos que $v \in \operatorname{conv}(a_1, a_2, a_3, a_4)$. Construir u en $\operatorname{conv}(a_1, a_2, a_3)$ tal que $v \in \operatorname{conv}(u, a_4)$.

Ejercicio 7. *5 %.*
Envolturas convexas. Sea V un espacio vectorial real o complejo y sea $A \subseteq V$. Supongamos que $\operatorname{conv}_2(A) \subseteq A$. Demostrar que $\operatorname{conv}_m(A) \subseteq A$ para cada m en $\mathbb{N}$. Sugerencia: usar la idea del ejercicio anterior.

Ejercicio 8. *5 %.*
El cubo de Hilbert es convexo. En el espacio ℓ^2 consideremos el conjunto

$$A := \left\{ a \in \ell^2 \colon \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant a_k \leqslant \frac{1}{k} \right\}.$$

Demostrar que A es un conjunto convexo.

Ejercicio 9. *7 %.*
La cerradura de la suma de dos conjuntos en un espacio normado. Sea V un espacio normado complejo y sean $P, Q \subseteq V$. Demostrar que $\operatorname{cl}(P + Q) \subseteq \operatorname{cl}(P) + \operatorname{cl}(Q)$. Encontrar un ejemplo tal que $\operatorname{cl}(P + Q) \neq \operatorname{cl}(P) + \operatorname{cl}(Q)$.

Ejercicio 10. *7 %.*
La envoltura convexa del conjunto compacto es compacta. Sea V un espacio de Banach complejo y sea A un subconjunto compacto de V. Demostrar que $\operatorname{conv}(A)$ también es compacto.

Ejercicio 11. *5 %.*
Ejemplo de normas equivalentes. En el espacio $\operatorname{BV}([0, 1])$ consideremos dos normas:

$$N_1(f) := \|f\|_{\sup} + \operatorname{Var}_0^1(f), \qquad N_2(f) := |f(0)| + \operatorname{Var}_0^1(f).$$

Demostrar de manera explícita que las normas N_1 y N_2 son equivalentes. En otras palabras, encontrar $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$ tales que para cada f en $\operatorname{BV}([0, 1])$

$$N_1(f) \leqslant C_1 N_2(f), \qquad N_2(f) \leqslant C_2 N_1(f).$$

Ejercicio 12. *8 %.*
Ejemplo de normas no equivalentes. En el espacio $\mathrm{BV}([0,1])$ consideremos la norma $\|\cdot\|_{\sup}$ y la norma

$$N_1(f) := \|f\|_{\sup} + \mathrm{Var}_0^1(f).$$

Demostrar que las normas $\|\cdot\|_{\sup}$ y N_1 no son equivalentes. Sugerencia: para cada $M > 0$ encontrar f en $\mathrm{BV}([0,1])$ tal que

$$N_1(f) > M\,\|f\|_{\sup}.$$

Ejercicio 13. *8 %.*
La esfera unitaria en el espacio $C^1([0,1])$ no es totalmente acotada. Consideramos el espacio $V = C^1([0,1])$ con la norma

$$\|f\|_{C^1} := \|f\|_{\sup} + \|f'\|_{\sup}.$$

Construir de manera explícita una sucesión $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ en V tal que $\|g_m\|_{C^1} = 1$ para cada g en $\mathbb{N}$ y

$$\forall m,n \in \mathbb{N} \qquad \Big(m \neq n \qquad \Longrightarrow \qquad \|g_m - g_n\|_{C^1} \geqslant 1\Big).$$

Dibujar las gráficas de g_2, g_5 y $g_2 - g_5$.

Ejercicio 14. *5 %.*
El espacio normado de las funciones acotadas uniformemente continuas. Sea X un espacio métrico. Denotamos por $C_{bu}(X)$ el conjunto de las funciones $X \to \mathbb{C}$ que son acotadas y uniformemente continuas.

I. Demostrar que si $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ son uniformemente continuas, entonces $f + g$ es uniformemente continua.

II. Demostrar que si $f\colon X \to \mathbb{C}$ es uniformemente continua y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces λf es uniformemente continua.

III. Demostrar que $C_{bu}(X)$ es un subespacio vectorial de $B(X)$. Este espacio se considera con la norma-supremo $\|\cdot\|_{\sup}$.

Ejercicio 15. *7 %.*
Completez del espacio de las funciones acotadas uniformemente continuas. Sea X un espacio métrico. Demostrar que $C_{bu}(X)$ es un subespacio cerrado del espacio $B(X)$.

Ejercicio 16. *8 %.*
La cerradura de un subespacio es un subespacio. Sea V un espacio normado complejo y sea W un subespacio vectorial de V. Demostrar que $\mathrm{cl}(W)$ también es un subespacio vectorial de V. Indicación: trabajar con puntos de adherencia y bolas.

Ejercicio 17. *6 %.*
Ejemplo de cálculo de la norma en el espacio cociente $\mathbb{R}^2/W$. En el espacio $V = \mathbb{R}^2$ con la norma euclidiana consideremos el subespacio $W = \ell(a)$, donde

$$a = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

I. Sea $x = [x_1, x_2]^\top$ en $\mathbb{R}^2$. Consideremos la función $f_x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_x(\lambda) := \|x + \lambda a\|^2$. Calcular el valor mínimo de esta función usando la derivada.
II. Sea $x = [x_1, x_2]^\top$. Calcular la norma del elemento $x + W$ del espacio cociente V/W.

Ejercicio 18. *7 %.*
Cada isomorfismo $\mathbb{C}^n \to V$ es un homeomorfismo. Sea V un espacio normado complejo de dimensión n y sea $T \colon \mathbb{C}^n \to V$ un isomorfismo. Demostrar que T es un homeomorfismo, sin usar el teorema de Banach de la transformación lineal abierta.