Análisis funcional. Tarea 1.
Variante α.

Bolas en espacios métricos y normados, conjuntos acotados en espacios métricos, ejemplos de bolas unitarias no totalmente acotadas, propiedades de operaciones con conjuntos en espacios vectoriales, continuidad de operaciones lineales en espacios normados, propiedades de subespacios en espacios normados, el cociente de espacios normados o seminormados.

Ejercicio 1. *5 %.*
La cerradura de una bola abierta puede ser un subconjunto propio de la bola cerrada. Consideramos el espacio $X = \mathbb{Z}$ con la distancia canónica $d(x, y) := |x - y|$. Encontrar a en X y $r > 0$ tales que

$$\mathrm{cl}(B(a, r)) \subsetneq \{x \in X: \ d(x, a) \leqslant r\}.$$

Ejercicio 2. *5 %.*
Ejemplos de puntos pertenecientes a un rayo. Sea X el espacio normado $\mathbb{R}^2$ con la norma euclidiana. Sean $a = (-1, 2)$, $b = (3, 1)$, $r = \|b - a\|$. Dibujar la bola $B(a, r)$. Dibujar un trozo de la recta que pasa por los puntos a y b. En esta recta marcar los puntos $p(0.5)$, $p(0.9)$, $p(1.1)$ y $p(1.5)$, donde

$$p(t) := (1 - t)a + tb.$$

Ejercicio 3. *12 %.*
En los espacios normados, la cerradura de la bola abierta es la bola cerrada con el mismo radio. Sean V un espacio normado, $a \in V$, $r > 0$. Demostrar que

$$\mathrm{cl}(B(a, r)) = \overline{B}(a, r).$$

Ejercicio 4. *8 %.*
Consideramos $\mathbb{Z}$ con la distancia canónica $d(x, y) := |x - y|$. Sea $A \subseteq \mathbb{Z}$. Demostrar que A es **acotado** si, y sólo si, A es finito.

Ejercicio 5. *13 %.*
La esfera unitaria en ℓ^2 no es totalmente acotada. Construir de manera explícita una sucesión $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ en ℓ^2 tal que $\|a_m\|_2 = 1$ para cada m en $\mathbb{N}$ y

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \qquad \Big(m \neq n \qquad \Longrightarrow \qquad \|a_m - a_n\|_2 \geqslant 1 \Big).$$

Ejercicio 6. *7 %.*
Operaciones lineales con conjuntos en espacios vectoriales. Sea V un espacio vectorial complejo y sean $A, B, C \subseteq V$. Demostrar que

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

Ejercicio 7. *10 %.*
La adición en espacios normados es continua. Sea V un espacio normado. Recordar la definición de la topología del producto en $V \times V$. Demostrar que la operación adición $V \times V \to V$ es continua.

Ejercicio 8. *15 %.*
La suma del conjunto cerrado con el conjunto compacto es un conjunto cerrado. Sea V un espacio normado complejo y sean $P, Q \subseteq V$ tales que P es cerrado y Q es compacto. Demostrar que $P + Q$ es cerrado.

Ejercicio 9. *15 %.*
Cada subespacio del espacio normado tiene interior vacío o coincide con el espacio total. Sea V un espacio normado complejo y sea W un subespacio de V. Supongamos que $\operatorname{int}(W) \neq \varnothing$. Demostrar que $W = V$.

Ejercicio 10. *10 %.*
Ejemplo de cálculo de la norma en el espacio cociente. En el espacio $V = \mathbb{R}^2$ con la norma euclidiana consideremos el subespacio $W = \ell(a)$, donde

$$a = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Sea $x = [x_1, x_2]^\top$ en $\mathbb{R}^2$. Consideremos la función $f_x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_x(\lambda) := \|x + \lambda a\|^2$. Calcular el valor mínimo de esta función usando la derivada.
II. Sea $x = [x_1, x_2]^\top$. Calcular la norma del elemento $x + W$ del espacio cociente V/W.

Análisis funcional. Tarea 1.
Variante 1.

Bolas en espacios métricos y normados, conjuntos acotados en espacios métricos, ejemplos de bolas unitarias no totalmente acotadas, propiedades de operaciones con conjuntos en espacios vectoriales, continuidad de operaciones lineales en espacios normados, propiedades de subespacios en espacios normados, el cociente de espacios normados o seminormados.

Ejercicio 1. *5 %.*
La frontera de una bola abierta puede no coincidir con la esfera. Encontrar un espacio métrico (X, d), un punto a en X y un número $r > 0$ tales que

$$\mathrm{fr}(B(a, r)) \neq S(a, r).$$

Ejercicio 2. *5 %.*
Ejemplos de puntos pertenecientes a un rayo. Sea X el espacio normado $\mathbb{R}^2$ con la norma euclidiana. Sean $a = (3, -1)$, $b = (1, 2)$, $r = \|b - a\|$. Dibujar la bola $B(a, r)$. Dibujar un trozo de la recta que pasa por los puntos a y b. En esta recta marcar los puntos $p(0.5)$, $p(0.8)$, $p(1.2)$ y $p(1.5)$, donde

$$p(t) := (1 - t)a + tb.$$

Ejercicio 3. *12 %.*
En los espacios normados, la frontera de la bola abierta es la esfera con el mismo radio. Sean V un espacio normado, $a \in V$, $r > 0$. Demostrar que

$$\mathrm{fr}(B(a, r)) = S(a, r).$$

Ejercicio 4. *8 %.*
Criterio de conjuntos acotados en espacios normados. Sea V un espacio normado y sea $A \subseteq V$. Demostrar que las siguientes dos condiciones son equivalentes.

(a) $\mathrm{diam}(A) < +\infty$;

(b) existe $R > 0$ tal que $A \subseteq B(0_V, R)$.

Ejercicio 5. *13 %.*
La esfera unitaria en el espacio de funciones de variación acotada no es separable. Consideramos el espacio $V = \mathrm{BV}([0,2])$ con la norma

$$\|f\|_{\mathrm{BV}} \coloneqq \|f\|_{\sup} + \mathrm{Var}_0^2(f).$$

Construir de manera explícita una familia $(g_t)_{t\in[0,1]}$ en V tal que $\|g_t\|_{\mathrm{BV}} = 1$ para cada t en $[0,1]$ y

$$\forall t, u \in [0,1] \qquad \Big(t \neq u \qquad \Longrightarrow \qquad \|g_t - g_u\|_{\mathrm{BV}} \geqslant 1\Big).$$

Sugerencia: se pueden construir funciones constantes a trozos. Dibujar las gráficas de g_t, g_u y $g_t - g_u$ para $t = 1/5$ y $u = 2/5$.

Ejercicio 6. *7 %.*
Operaciones lineales con conjuntos en espacios vectoriales. Sea V un espacio vectorial complejo. Sean $A, B \subseteq V$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Demostrar que

$$\lambda(A + B) = (\lambda A) + (\lambda B).$$

Ejercicio 7. *10 %.*
Los conjuntos abiertos desplazados y dilatados en espacios normados. Sea V un espacio normado complejo, sea $A \subseteq V$ un subconjunto abierto de V y sean $b \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Demostrar que el conjunto $C \coloneqq \lambda A + b$ es abierto. Indicación: hacer una demostración directa, trabajando con bolas.

Ejercicio 8. *15 %.*
Las vecindades de los conjuntos en los espacios normados. Sea V un espacio normado complejo y sea $A \subseteq V$.

I. Dado $\varepsilon > 0$, demostar que

$$\big\{v \in V:\ d(v, A) < \varepsilon\big\} = A + \varepsilon B(0_V, 1).$$

II. Demostrar que

$$\mathrm{cl}(A) = \bigcap_{\varepsilon>0} \big(A + \varepsilon B(0_V, 1)\big).$$

Ejercicio 9. *15 %.*
Subespacios densos y no densos.

I. Sea V un espacio normado complejo y sea W un subespacio vectorial de V tal que $W \neq V$ y $\dim(W) = n$. Demostrar que W es cerrado (se puede usar algún resultado demostrado en el curso) y concluir que $\mathrm{cl}(W) \neq V$.

II. Encontrar un espacio normado complejo V y un subespacio vectorial W de V tales que $W \neq V$, pero $\mathrm{cl}(W) = V$.

Ejercicio 10. *10 %.*
Ejemplo de cálculo de la norma en el espacio cociente. En el espacio $V = \mathbb{R}^2$ con la norma euclidiana consideremos el subespacio $W = \ell(a)$, donde

$$a = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Sea $x = [x_1, x_2]^\top$ en $\mathbb{R}^2$. Consideremos la función $f_x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_x(\lambda) \coloneqq \|x + \lambda a\|^2$. Calcular el valor mínimo de esta función usando la derivada.
II. Sea $x = [x_1, x_2]^\top$. Calcular la norma del elemento $x + W$ del espacio cociente V/W.

Análisis funcional. Tarea 1.
Variante 2.

Bolas en espacios métricos y normados, conjuntos acotados en espacios métricos, ejemplos de bolas unitarias no totalmente acotadas, propiedades de operaciones con conjuntos en espacios vectoriales, continuidad de operaciones lineales en espacios normados, propiedades de subespacios en espacios normados, el cociente de espacios normados o seminormados.

Ejercicio 1. *5 %.*
La intersección de dos bolas puede ser vacía, aunque la distancia entre los centros es menor que la suma de los radios. Encontrar un subespacio métrico X del espacio $\mathbb{R}^2$, dos puntos a_1, a_2 en X y dos números $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$d(a_1, a_2) < r_1 + r_2, \qquad B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \varnothing.$$

Ejercicio 2. *5 %.*
Ejemplos de puntos pertenecientes a un segmento. Sea X el espacio normado $\mathbb{R}^2$ con la norma euclidiana. Sean $a_1 = (-3, -1)$, $a_2 = (4, -2)$, $r_1 = 6$, $r_2 = 2$. Dibujar las bolas $B(a_1, r_1)$ y $B(a_2, r_2)$. Dibujar el segmento que une los puntos a_1 y a_2. Marcar los puntos $p(1/10)$, $p(1/2)$, $p(3/4)$ y $p(9/10)$, donde

$$p(t) := (1 - t)a_1 + ta_2.$$

Ejercicio 3. *12 %.*
En los espacio normados, si la distancia entre los centros de dos bolas es menor que la suma de los radios, entonces las bolas intersectan. Sean V un espacio normado, $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$d(a_1, a_2) < r_1 + r_2.$$

Construir un punto en $B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2)$.

Ejercicio 4. *8 %.*
Una cota superior para el diámetro de la unión de un conjunto acotado con un conjunto unipuntual. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$ tal que $\operatorname{diam}(A) < +\infty$. Sea $b \in X$. Pongamos $C := A \cup \{b\}$. Demostrar que

$$\operatorname{diam}(C) \leqslant \operatorname{diam}(A) + d(b, A).$$

Hacer un dibujo que ayude a entender la idea de la parte principal de la demostración. Indicación: hay que resolver este ejercicio de manera directa; no está permitido usar resultados más generales sobre el diámetro de la unión de dos conjuntos.

Ejercicio 5. *13 %.*
La esfera unitaria en el espacio de funciones absolutamente continuas no es totalmente acotada. Consideramos el espacio $V = \mathrm{AC}([0,1])$ con la norma

$$\|f\|_{\mathrm{AC}} := \|f\|_{\sup} + \int_0^1 |f'|.$$

Construir de manera explícita una sucesión $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ en V tal que $\|g_m\|_{\mathrm{AC}} = 1$ para cada g en $\mathbb{N}$ y

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \qquad \Big(m \neq n \qquad \Longrightarrow \qquad \|g_m - g_n\|_{\mathrm{AC}} \geqslant 1\Big).$$

Dibujar las gráficas de g_2, g_5 y $g_2 - g_5$.

Ejercicio 6. *7 %.*
Operaciones lineales con conjuntos en espacios vectoriales. Sea V un espacio vectorial complejo. Sean $A \subseteq V$, $\xi, \eta \in \mathbb{C}$. Demostrar que

$$(\xi + \eta)A = (\xi A) + (\eta A).$$

Ejercicio 7. *10 %.*
La cerradura de un conjunto convexo es un conjunto convexo. Sea V un espacio normado complejo y sea A un subconjunto convexo de V. Demostrar que $\mathrm{cl}(A)$ también es un subconjunto convexo de V. Indicación: trabajar con puntos de adherencia y bolas.

Ejercicio 8. *15 %.*
La suma del conjunto abierto con el conjunto arbitrario es un conjunto abierto. Sea V un espacio normado y sean P, Q subconjuntos de V. Supongamos que P es abierto. Demostrar que $P + Q$ es abierto.

Ejercicio 9. *15 %.*
Cada subespacio del espacio normado tiene interior vacío o coincide con el espacio total. Sea V un espacio normado complejo y sea W un subespacio de V. Supongamos que $\mathrm{int}(W) \neq \varnothing$. Demostrar que $W = V$.

Ejercicio 10. *10 %.*
Ejemplo de cálculo de la norma en el espacio cociente. En el espacio $V = \mathbb{R}^2$ con la norma euclidiana consideremos el subespacio $W = \ell(a)$, donde

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

I. Sea $x = [x_1, x_2]^\top$ en $\mathbb{R}^2$. Consideremos la función $f_x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_x(\lambda) := \|x + \lambda a\|^2$. Calcular el valor mínimo de esta función usando la derivada.
II. Sea $x = [x_1, x_2]^\top$. Calcular la norma del elemento $x + W$ del espacio cociente V/W.

Análisis funcional. Tarea 1.
Variante 3.

Bolas en espacios métricos y normados, conjuntos acotados en espacios métricos, ejemplos de bolas unitarias no totalmente acotadas, propiedades de operaciones con conjuntos en espacios vectoriales, continuidad de operaciones lineales en espacios normados, propiedades de subespacios en espacios normados, el cociente de espacios normados o seminormados.

Ejercicio 1. *5 %.*
Una bola de radio mayor puede ser subconjunto propio de una bola de radio menor. Consideramos el subespacio métrico $X = [0, 10]^2$ del espacio $\mathbb{R}^2$. Encontrar dos puntos a_1, a_2 en X y dos números $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$r_1 < r_2, \qquad B(a_2, r_2) \subsetneq B(a_1, r_1).$$

Ejercicio 2. *5 %.*
Ejemplos de puntos pertenecientes a un rayo. Sea X el espacio normado $\mathbb{R}^2$ con la norma euclidiana. Sean $a_1 = (-2, 1)$, $a_2 = (3, -2)$, $r_1 = 2$, $r_2 = 6$. Dibujar las bolas $B(a_1, r_1)$ y $B(a_2, r_2)$. Dibujar un trozo del rayo que inicia en a_2 y pasa por a_1. En este rayo marcar los puntos $p(0.5)$, $p(0.9)$, $p(1.1)$ y $p(1.3)$, donde

$$p(t) := (1 - t)a_2 + ta_1.$$

Ejercicio 3. *12 %.*
En los espacios normados, si la distancia entre los centros es menor que la diferencia de los radios, entonces una bola no está contenida en la otra. Sean V un espacio normado, $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$r_2 < d(a_1, a_2) + r_1.$$

Construir un punto en $B(a_1, r_1) \setminus B(a_2, r_2)$.

Ejercicio 4. *8 %.*
En los espacios normados, los subespacios no triviales son no acotados. Sea V un espacio normado y sea W un subespacio de V tal que $W \neq \{0_V\}$. Demostrar que W es un conjunto no acotado.

Ejercicio 5. *13 %.*
La esfera unitaria en el espacio de funciones continuas no es totalmente acotada. Consideramos el espacio $V = C([0,1])$ con la norma-supremo. Construir de manera explícita una sucesión $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ en V tal que $\|g_m\|_{\sup} = 1$ para cada g en $\mathbb{N}$ y

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \qquad \Big(m \neq n \qquad \Longrightarrow \qquad \|g_m - g_n\|_{\sup} \geqslant 1\Big).$$

Dibujar las gráficas de g_2, g_5 y $g_2 - g_5$.

Ejercicio 6. *7 %.*
Operaciones lineales con conjuntos en espacios vectoriales. Sea V un espacio vectorial complejo y sea $A \subseteq V$. Supongamos que A es convexo. Demostrar que el conjunto $A - A$ también es convexo.

Ejercicio 7. *10 %.*
Los conjuntos cerrados desplazados y dilatados en espacios normados. Sea V un espacio normado complejo, sea $A \subseteq V$ un subconjunto cerrado de V y sean $b \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Demostrar que el conjunto $C := \lambda A + b$ es cerrado. Indicación: hacer una demostración directa, trabajando con puntos de adherencia y bolas.

Ejercicio 8. *15 %.*
La suma de dos conjuntos cerrados en un espacio normado puede no ser cerrada. En el espacio $\mathbb{C}$ encontrar dos subconjuntos cerrados X, Y tales que el conjunto $X + Y$ no sea cerrado.

Ejercicio 9. *15 %.*
La suma de dos subespacios cerrados no siempre es cerrada. En el espacio ℓ^2 consideremos los siguientes dos subespacios:

$$S_1 = \Big\{x \in \ell^2(\mathbb{N}) \colon \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad x_{2j} = 0\Big\}, \qquad S_2 = \left\{x \in \ell^2(\mathbb{N}) \colon \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad x_{2j} = \frac{x_{2j-1}}{j}\right\}.$$

I. Representar S_1 y S_2 como intersecciones de los núcleos de ciertos funcionales linales acotados definidos en ℓ^2.

II. Demostrar que S_1 y S_2 son cerrados.

III. Demostrar que $e_{2m-1} \in S_1$ y $e_{2m-1} + \frac{e_{2m}}{m} \in S_2$ para cada m en $\mathbb{N}$.

IV. Demostrar que $e_{2m-1} \in S_1 + S_2$ y $e_{2m} \in S_1 + S_2$ para cada m en $\mathbb{N}$.

V. Demostrar que $\mathrm{cl}(S_1 + S_2) = \ell^2$.

VI. Demostrar que la sucesión $u = (0, 1, 0, 1/2, 0, 1/3, \ldots)$ no pertenece al subespacio $S_1 + S_2$.

Ejercicio 10. *10 %.*
Ejemplo de cálculo de la norma en el espacio cociente. En el espacio $V = \mathbb{R}^2$ con la norma euclidiana consideremos el subespacio $W = \ell(a)$, donde

$$a = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

I. Sea $x = [x_1, x_2]^\top$ en $\mathbb{R}^2$. Consideremos la función $f_x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_x(\lambda) := \|x + \lambda a\|^2$. Calcular el valor mínimo de esta función usando la derivada.
II. Sea $x = [x_1, x_2]^\top$. Calcular la norma del elemento $x + W$ del espacio cociente V/W.

Análisis funcional. Tarea 1.
Variante 4.

Bolas en espacios métricos y normados, conjuntos acotados en espacios métricos, ejemplos de bolas unitarias no totalmente acotadas, propiedades de operaciones con conjuntos en espacios vectoriales, continuidad de operaciones lineales en espacios normados, propiedades de subespacios en espacios normados, el cociente de espacios normados o seminormados.

Ejercicio 1. *5 %.*
El interior de una bola cerrada puede no coincidir con la bola abierta del mismo radio. Encontrar un espacio métrico (X, d), un punto a en X y un número $r > 0$ tales que

$$B(a, r) \neq \operatorname{int}(\overline{B}(a, r)).$$

Ejercicio 2. *5 %.*
Ejemplos de puntos pertenecientes a un rayo. Sea X el espacio normado $\mathbb{R}^2$ con la norma euclidiana. Sean $a = (-1, -1)$, $b = (2, -3)$, $r = \|b - a\|$. Dibujar la bola $B(a, r)$. Dibujar un trozo del rayo que inicia en a y pasa por b. En este rayo marcar los puntos $p(0.5)$, $p(0.8)$, $p(1.2)$ y $p(1.5)$, donde

$$p(t) := (1 - t)a + tb.$$

Ejercicio 3. *12 %.*
En los espacios normados, el interior de la bola cerrada es la bola abierta del mismo radio. Sean V un espacio normado, $a \in V$, $r_1 > 0$. Demostrar que

$$\operatorname{int}(\overline{B}(a, r)) = B(a, r).$$

Ejercicio 4. *8 %.*
El diámetro de la cerradura del conjunto coincide con el diámetro del conjunto original. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$. Demostrar que

$$\operatorname{diam}(\operatorname{cl}(A)) = \operatorname{diam}(A).$$

Ejercicio 5. *13 %.*
La esfera unitaria en el espacio $L^2([0,1])$ no es totalmente acotada. Consideramos el espacio $V = L^2([0,1])$, donde $[0,1]$ está provisto de la medida de Lebesgue. Construir de manera explícita una sucesión $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ en V tal que $\|g_m\|_2 = 1$ para cada g en $\mathbb{N}$ y

$$\forall m,n \in \mathbb{N} \qquad \Big(m \neq n \qquad \Longrightarrow \qquad \|g_m - g_n\|_2 \geqslant 1\Big).$$

Dibujar las gráficas de g_2, g_5 y $g_2 - g_5$.

Ejercicio 6. *7 %.*
Operaciones lineales con conjuntos en espacios vectoriales. Sea V un espacio vectorial complejo. Sean $A \subseteq V$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $b \in V$. Supongamos que A es convexo. Demostrar que el conjunto $C := \lambda A + b$ también es convexo.

Ejercicio 7. *10 %.*
La continuidad de multiplicación por escalares en el lenguaje de sucesiones. Sea V un espacio normado complejo, sean $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V, $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$, $b \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$. Supongamos que

$$\lim_{k\to\infty} a_k = b, \qquad \lim_{k\to\infty} \xi_k = \eta.$$

Demostrar que

$$\lim_{k\to\infty} (\xi_k a_k) = \eta b.$$

Ejercicio 8. *15 %.*
El interior del conjunto convexo es convexo. Sea V un espacio normado complejo y sea A un subconjunto convexo de V. Demostrar que $\operatorname{int}(A)$ es convexo.

Ejercicio 9. *15 %.*
Ejemplos de subespacios. En el espacio $\ell^1(\mathbb{N})$ construir dos subespacios cerrados W_1 y W_2 tales que $\ell^1(\mathbb{N}) = W_1 + W_2$ y que ninguno de estos subespacios sea de dimensión finita. Justificar bien todas las propiedades mencionadas.

Ejercicio 10. *10 %.*
Ejemplo de cálculo de la norma en el espacio cociente. En el espacio $V = \mathbb{R}^2$ con la norma euclidiana consideremos el subespacio $W = \ell(a)$, donde

$$a = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

I. Sea $x = [x_1, x_2]^\top$ en $\mathbb{R}^2$. Consideremos la función $f_x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_x(\lambda) := \|x + \lambda a\|^2$. Calcular el valor mínimo de esta función usando la derivada.
II. Sea $x = [x_1, x_2]^\top$. Calcular la norma del elemento $x + W$ del espacio cociente V/W.

Análisis funcional. Tarea 1.
Variante 5.

Bolas en espacios métricos y normados, conjuntos acotados en espacios métricos, ejemplos de bolas unitarias no totalmente acotadas, propiedades de operaciones con conjuntos en espacios vectoriales, continuidad de operaciones lineales en espacios normados, propiedades de subespacios en espacios normados, el cociente de espacios normados o seminormados.

Ejercicio 1. *5 %.*
La intersección de dos bolas puede ser vacía, aunque la distancia entre los centros es menor que la suma de los radios. Consideramos el espacio $\mathbb{Z}$ con la distancia

$$d(x,y) \coloneqq \begin{cases} |x| + |y|, & x \neq y; \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Verificar que se cumple la desigualdad del triángulo. Encontrar dos puntos a_1, a_2 en X y dos números $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$d(a_1, a_2) < r_1 + r_2, \qquad B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2) = \emptyset.$$

Ejercicio 2. *5 %.*
Ejemplos de puntos pertenecientes a un segmento. Sea X el espacio normado $\mathbb{R}^2$ con la norma euclidiana. Sean $a_1 = (-2, 1)$, $a_2 = (4, -2)$, $r_1 = 2$, $r_2 = 6$. Dibujar las bolas $B(a_1, r_1)$ y $B(a_2, r_2)$. Dibujar el segmento que une los puntos a_1 y a_2. Marcar los puntos $p(1/10)$, $p(1/4)$, $p(1/2)$, $p(3/4)$ y $p(9/10)$, donde

$$p(t) \coloneqq (1 - t)a_1 + t a_2.$$

Ejercicio 3. *12 %.*
En los espacio normados, si la distancia entre los centros de dos bolas es menor que la suma de los radios, entonces las bolas intersectan. Sean V un espacio normado, $a_1, a_2 \in V$, $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$d(a_1, a_2) < r_1 + r_2.$$

Construir un punto en $B(a_1, r_1) \cap B(a_2, r_2)$.

Ejercicio 4. *8 %.*
En los espacios normados, la suma de dos conjuntos acotados es un conjunto acotado. Sea V un espacio normado y sean $P, Q \subseteq V$ conjuntos acotados. Demostrar que $P + Q$ es un conjunto acotado.

Ejercicio 5. *13 %.*
La esfera unitaria en el espacio $\mathbf{C}^1([0,1])$ no es totalmente acotada. Consideramos el espacio $V = C^1([0,1])$ con la norma

$$\|f\|_{C^1} := \|f\|_{\sup} + \|f'\|_{\sup}.$$

Construir de manera explícita una sucesión $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ en V tal que $\|g_m\|_{C^1} = 1$ para cada g en $\mathbb{N}$ y

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \qquad \Big(m \neq n \qquad \Longrightarrow \qquad \|g_m - g_n\|_{C^1} \geqslant 1\Big).$$

Dibujar las gráficas de g_2, g_5 y $g_2 - g_5$.

Ejercicio 6. *7 %.*
Operaciones lineales con conjuntos en espacios vectoriales. Sea V un espacio vectorial complejo y sean $P, Q \subseteq V$ subconjuntos convexos de V. Demostrar que el conjunto $P + Q$ también es convexo.

Ejercicio 7. *10 %.*
Las traslaciones y dilataciones no nulas son homeomorfismos. Sea V un espacio normado complejo.

I. Sean $b \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Definimos $T\colon V \to V$ mediante la regla $T(x) := \lambda x + b$. Demostrar de manera directa que T es continua en cada punto. Indicación: trabajar con vecindades (bolas).

II. Sean $b \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Definimos $T\colon V \to V$ mediante la regla $T(x) := \lambda x + b$. Demostrar que T es un homeomorfismo.

Ejercicio 8. *15 %.*
La suma del conjunto cerrado con el conjunto compacto es un conjunto cerrado. Sea V un espacio normado complejo y sean $P, Q \subseteq V$ tales que P es cerrado y Q es compacto. Demostrar que $P + Q$ es cerrado.

Ejercicio 9. *15 %.*
La cerradura de un subespacio es un subespacio. Sea V un espacio normado complejo y sea W un subespacio vectorial de V. Demostrar que $\mathrm{cl}(W)$ también es un subespacio vectorial de V. Indicación: trabajar con puntos de adherencia y bolas.

Ejercicio 10. *10 %.*
Ejemplo de cálculo de la norma en el espacio cociente. En el espacio $V = \mathbb{R}^2$ con la norma euclidiana consideremos el subespacio $W = \ell(a)$, donde

$$a = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

I. Sea $x = [x_1, x_2]^\top$ en $\mathbb{R}^2$. Consideremos la función $f_x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_x(\lambda) := \|x + \lambda a\|^2$. Calcular el valor mínimo de esta función usando la derivada.

II. Sea $x = [x_1, x_2]^\top$. Calcular la norma del elemento $x + W$ del espacio cociente V/W.

Análisis funcional. Tarea 1.
Variante 6.

Bolas en espacios métricos y normados, conjuntos acotados en espacios métricos, ejemplos de bolas unitarias no totalmente acotadas, propiedades de operaciones con conjuntos en espacios vectoriales, continuidad de operaciones lineales en espacios normados, propiedades de subespacios en espacios normados, el cociente de espacios normados o seminormados.

Ejercicio 1. *5 %.*
El diámetro de una bola puede ser más pequeños que su radio doble. Encontrar un espacio métrico (X, d), un punto a en X y un número $r > 0$ tales que

$$\operatorname{diam}(B(a, r)) < 2r.$$

Ejercicio 2. *5 %.*
Ejemplos de puntos pertenecientes a una recta. Sea X el espacio normado $\mathbb{R}^2$ con la norma euclidiana. Sean $a = (2, -1)$, $b = (-3, 1)$, $r = \|b - a\|$. Dibujar la bola $B(a, r)$. Dibujar un trozo de la recta que pasa por los puntos a y b. En esta recta marcar los puntos $p(-0.9)$, $p(-0.3)$, $p(0.5)$ y $p(0.8)$, donde

$$p(t) := (1 - t)a + tb.$$

Ejercicio 3. *12 %.*
En los espacios normados, el diámetro de la bola es su radio doble. Sean V un espacio normado, $a \in V$, $r > 0$. Demostrar que

$$\operatorname{diam}(B(a, r)) = 2r.$$

Ejercicio 4. *8 %.*
Una cota superior para la distancia entre dos puntos, si se sabe su distancia a un conjunto acotado. Sean (X, d) un espacio métrico, sea $A \subseteq X$ un conjunto no vacío acotado y sean $p, q \in X$. Demostrar que

$$d(p, q) \leqslant d(p, A) + d(q, A) + \operatorname{diam}(A).$$

Hacer un dibujo que ayude a entender la idea de la parte principal de la demostración.

Ejercicio 5. *13 %.*
La esfera unitaria en el espacio $L^1([0,1])$ no es totalmente acotada. Consideramos el espacio $V = L^1([0,1])$, donde $[0,1]$ está provisto de la medida de Lebesgue. Construir de manera explícita una sucesión $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ en V tal que $\|g_m\|_1 = 1$ para cada g en $\mathbb{N}$ y

$$\forall m,n \in \mathbb{N} \qquad \Big(m \neq n \qquad \Longrightarrow \qquad \|g_m - g_n\|_1 \geqslant 1\Big).$$

Dibujar las gráficas de g_2, g_5 y $g_2 - g_5$.

Ejercicio 6. *7 %.*
Operaciones lineales con conjuntos en espacios vectoriales. Demostrar o refutar la siguiente conjetura: para cualquier espacio vectorial V y para cualesquiera $A, B, C \subseteq V$, se cumple la identidad

$$(A + B) \cap C = (A \cap C) + (B \cap C).$$

Ejercicio 7. *10 %.*
La suma de dos series convergentes en el espacio normado. Sea V un espacio normado complejo y sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones con valores en V tales que convergen las series

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_n.$$

Demostrar que la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ también converge, y

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_n + \sum_{k=1}^{\infty} b_n.$$

Indicación: introducir la notación para las sumas parciales de las dos series originales y para sus límites.

Ejercicio 8. *15 %.*
La envoltura convexa del conjunto acotado es un conjunto acotado. Sea V un espacio normado complejo y sea A un subconjunto acotado de V. Demostrar que $\operatorname{conv}(A)$ también es acotado.

Ejercicio 9. *15 %.*
Ejemplo de subespacio. En el espacio ℓ^2 consideremos el siguiente conjunto:

$$W := \big\{a \in \ell^2 \colon \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad a_{2k-1} = k a_{2k}\big\}.$$

Denotemos por

I. Demostrar que W es un subespacio cerrado de ℓ^2.

II. Encontrar una sucesión de clase W que tenga una infinidad de componentes no nulas. En otras palabras, encontrar una sucesión de clase $W \setminus Z$, donde Z es el espacio de sucesiones de soporte finito.

Ejercicio 10. *10 %.*
Ejemplo de cálculo de la norma en el espacio cociente. En el espacio $V = \mathbb{R}^2$ con la norma euclidiana consideremos el subespacio $W = \ell(a)$, donde

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

I. Sea $x = [x_1, x_2]^\top$ en $\mathbb{R}^2$. Consideremos la función $f_x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_x(\lambda) := \|x + \lambda a\|^2$. Calcular el valor mínimo de esta función usando la derivada.
II. Sea $x = [x_1, x_2]^\top$. Calcular la norma del elemento $x + W$ del espacio cociente V/W.