Análisis Funcional, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 2. Variante α.

Espacios con producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *5 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 84, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 65, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 101,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 8, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 49, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 21.$$

Ejercicio 2. *5 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

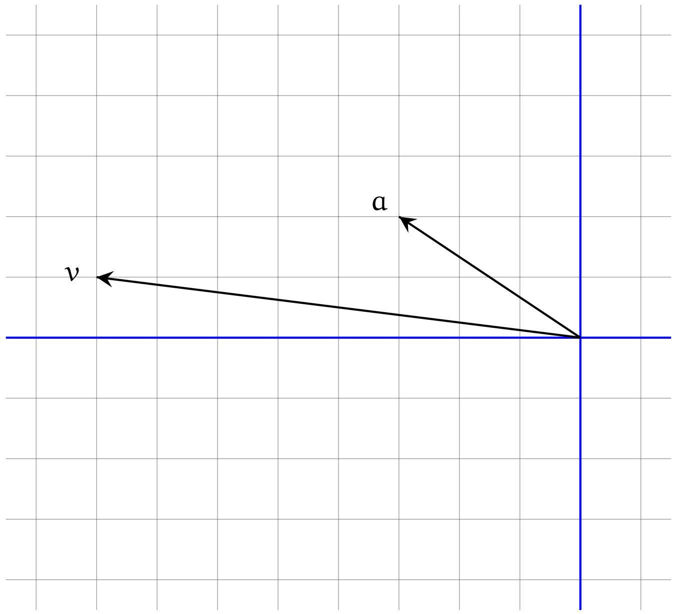
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \, \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \, \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \, \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *5 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *5 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *5 %.*
Está dado un vector $a \in \mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** P_a y la **matriz de reflexión ortogonal** H_a. Verifique que las matrices P_a y H_a son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_a a, \qquad P_a^2, \qquad H_a a, \qquad H_a^2.$$

Ejercicio 6. *5 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^2$:

$$v = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_a v = \|v\|\, e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_2$ y $H_a v = \|v\|\, e_1$.

Ejercicio 7. *5 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^3$:

$$v = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_a v = \|v\|\, e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_3$ y $H_a v = \|v\|\, e_1$.

Ejercicio 8. *5 %.*
Sean $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ algunos vectores del espacio $\mathbb{R}^5$ tales que

$$b_1 = \frac{a_1}{3}, \qquad b_2 = \frac{a_2 + 4b_1}{8}, \qquad b_3 = \frac{a_3 - 6b_1 - 9b_2}{2}.$$

I. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3.

II. Encuentre una matriz R tal que $A = BR$, donde A es la matriz formada de las columnas a_1, a_2, a_3, y B es la matriz formada de las columnas b_1, b_2, b_3.

Ejercicio 9. *6 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -22 \\ -8 \\ -1 \\ -16 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *6 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -10 \\ 2 \\ -13 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *8 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 4 & -8 & 19 \\ 2 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *10 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle \coloneqq \int_0^1 f(x)g(x)\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$

donde $\quad I_p \coloneqq \int_0^1 x^p\, dx.$

Ejercicio 13. *5 %.*

I. En este ejercicio demostramos **el teorema de Pitágoras** y un poco más. Sea H un espacio vectorial real con producto interno y sean $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathsf{H}$. Demuestre que

$$\mathsf{a} \perp \mathsf{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|\mathsf{a}+\mathsf{b}\|^2 = \|\mathsf{a}\|^2 + \|\mathsf{b}\|^2.$$

II. Construya en $\mathbb{R}^3$ dos vectores a, b con componentes enteras no nulas, de tal manera que a y b sean ortogonales. Calcule su producto interno. Calcule las normas $\|\mathsf{a}+\mathsf{b}\|$, $\|\mathsf{a}\|$, $\|\mathsf{b}\|$ y la expresión $\|\mathsf{a}+\mathsf{b}\|^2 - \|\mathsf{a}\|^2 - \|\mathsf{b}\|^2$.

III. Construya en $\mathbb{R}^3$ dos vectores a, b con componentes enteras no nulas, de tal manera que a y b no sean ortogonales. Calcule su producto interno. Calcule las normas $\|\mathsf{a}+\mathsf{b}\|$, $\|\mathsf{a}\|$, $\|\mathsf{b}\|$ y la expresión $\|\mathsf{a}+\mathsf{b}\|^2 - \|\mathsf{a}\|^2 - \|\mathsf{b}\|^2$.

Ejercicio 14. *5 %.*

I. Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno. Demuestre que la norma inducida por el producto interno satisface la identidad de paralelogramo.

II. Demuestre que en el espacio ℓ^1 no existe ningún producto interno que induzca la norma de este espacio.

Ejercicio 15. *5 %.*

Están dados dos vectores en $\mathbb{R}^2$:

$$\mathsf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathsf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Denotemos por m al vector $\frac{1}{2}(\mathsf{a}+\mathsf{b})$.

I. Calcule m de manera explícita, luego calcule $\|\mathsf{m}\|$.

II. Calcule $\|\mathsf{a}\|$, $\|\mathsf{b}\|$, $\|\mathsf{a}-\mathsf{b}\|$. Calcule $\|\mathsf{m}\|$ usando el teorema de Apolonio.

Ejercicio 16. *5 %.*

Criterio de igualdad en la desigualdad de Schwarz, demostración. Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno y sean $a, b \in H$. Supongamos que $a \neq 0_H$ y que

$$|\langle a, b\rangle| = \|a\|\,\|b\|.$$

Pongamos

$$\lambda := \frac{\langle b, a\rangle}{\|a\|^2}, \qquad u := \lambda a, \qquad w := b - u.$$

I. Demuestre que $w \perp a$. Demuestre que $u \perp w$.

II. Usando la suposición (la "igualdad de Schwarz") exprese λ y $\|u\|$ en términos de $\|a\|$ y $\|b\|$.

III. Aplique el teorema de Pitágoras a los vectores u, w, b.

IV. Muestre que b es un múltiplo de a.

Ejercicio 17. *5 %.*

Están dados dos vectores en $\mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 15 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

I. Considere la matriz M formada por las columnas a y b. Usando operaciones elementales por renglones, reduzca la matriz M a una forma escalonada o pseudoescalonada. Determine el rango de M. Concluya si los vectores a y b son linealmente dependientes o no.

II. Verifique si se cumple la igualdad

$$\big|\langle a, b\rangle\big| = \|a\|\,\|b\|.$$

Ejercicio 18. *5 %.*

Están dados dos vectores en $\mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

I. Considere la matriz M formada por las columnas a y b. Usando operaciones elementales por renglones, reduzca la matriz M a una forma escalonada o pseudoescalonada. Determine el rango de M. Concluya si los vectores a y b son linealmente dependientes o no.

II. Verifique si se cumple la igualdad

$$\big|\langle a, b\rangle\big| = \|a\|\,\|b\|.$$

Análisis Funcional, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 2. Variante β.

Espacios con producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *5 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 41, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 5, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 38,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 25, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 9, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 38.$$

Ejercicio 2. *5 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

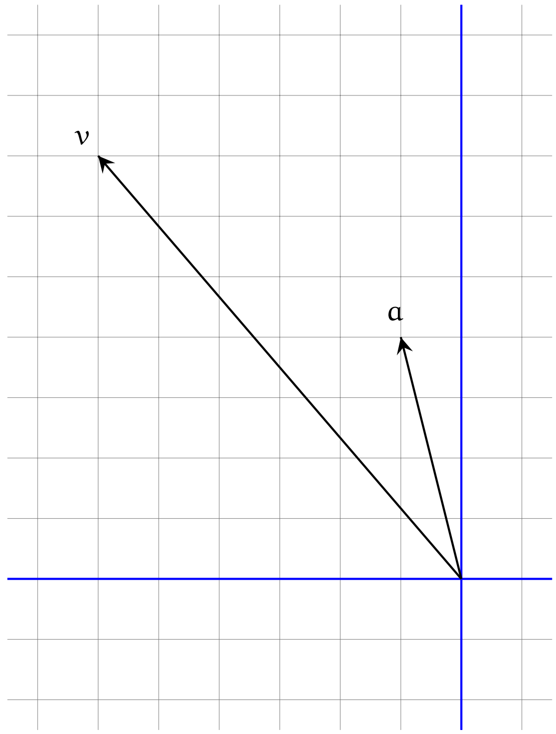
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \, \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \, \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \, \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *5 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *5 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *5 %.*
Está dado un vector $a \in \mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** P_a y la **matriz de reflexión ortogonal** H_a. Verifique que las matrices P_a y H_a son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_a a, \qquad P_a^2, \qquad H_a a, \qquad H_a^2.$$

Ejercicio 6. *5 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^2$:

$$v = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_a v = \|v\| e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_2$ y $H_a v = \|v\| e_1$.

Ejercicio 7. *5 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^3$:

$$v = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_a v = \|v\| e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_3$ y $H_a v = \|v\| e_1$.

Ejercicio 8. *5 %.*
Sean $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ algunos vectores del espacio $\mathbb{R}^5$ tales que

$$b_1 = \frac{a_1}{8}, \qquad b_2 = \frac{a_2 - 3b_1}{2}, \qquad b_3 = \frac{a_3 + 9b_1 - 9b_2}{5}.$$

I. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3.

II. Encuentre una matriz R tal que $A = BR$, donde A es la matriz formada de las columnas a_1, a_2, a_3, y B es la matriz formada de las columnas b_1, b_2, b_3.

Ejercicio 9. *6 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -28 \\ 18 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *6 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 21 \\ 8 \\ 22 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *8 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & 19 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *10 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,(1 - x^2)\,dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{63}$

donde $I_p := \int_0^1 x^p\,(1 - x^2)\,dx.$

Ejercicio 13. *5 %.*

I. En este ejercicio demostramos **el teorema de Pitágoras** y un poco más. Sea H un espacio vectorial real con producto interno y sean $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathsf{H}$. Demuestre que

$$\mathsf{a} \perp \mathsf{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|\mathsf{a}+\mathsf{b}\|^2 = \|\mathsf{a}\|^2 + \|\mathsf{b}\|^2.$$

II. Construya en $\mathbb{R}^3$ dos vectores a, b con componentes enteras no nulas, de tal manera que a y b sean ortogonales. Calcule su producto interno. Calcule las normas $\|\mathsf{a}+\mathsf{b}\|$, $\|\mathsf{a}\|$, $\|\mathsf{b}\|$ y la expresión $\|\mathsf{a}+\mathsf{b}\|^2 - \|\mathsf{a}\|^2 - \|\mathsf{b}\|^2$.

III. Construya en $\mathbb{R}^3$ dos vectores a, b con componentes enteras no nulas, de tal manera que a y b no sean ortogonales. Calcule su producto interno. Calcule las normas $\|\mathsf{a}+\mathsf{b}\|$, $\|\mathsf{a}\|$, $\|\mathsf{b}\|$ y la expresión $\|\mathsf{a}+\mathsf{b}\|^2 - \|\mathsf{a}\|^2 - \|\mathsf{b}\|^2$.

Ejercicio 14. *5 %.*

I. Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno. Demuestre que la norma inducida por el producto interno satisface la identidad de paralelogramo.

II. Demuestre que en el espacio $\mathrm{BV}([0,1])$ no existe ningún producto interno que induzca la norma de este espacio.

Ejercicio 15. *5 %.*

Están dados dos vectores en $\mathbb{R}^2$:

$$\mathsf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathsf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Denotemos por m al vector $\frac{1}{2}(\mathsf{a}+\mathsf{b})$.

I. Calcule m de manera explícita, luego calcule $\|\mathsf{m}\|$.

II. Calcule $\|\mathsf{a}\|$, $\|\mathsf{b}\|$, $\|\mathsf{a}-\mathsf{b}\|$. Calcule $\|\mathsf{m}\|$ usando el teorema de Apolonio.

Ejercicio 16. *5 %.*
Criterio de igualdad en la desigualdad de Schwarz, demostración. Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno y sean $a, b \in H$. Supongamos que $a \neq 0_H$ y que

$$|\langle a, b \rangle| = \|a\| \, \|b\|.$$

Pongamos

$$\lambda := \frac{\langle b, a \rangle}{\|a\|^2}, \qquad u := \lambda a, \qquad w := b - u.$$

I. Demuestre que $w \perp a$. Demuestre que $u \perp w$.

II. Usando la suposición (la "igualdad de Schwarz") exprese λ y $\|u\|$ en términos de $\|a\|$ y $\|b\|$.

III. Aplique el teorema de Pitágoras a los vectores u, w, b.

IV. Muestre que b es un múltiplo de a.

Ejercicio 17. *5 %.*
Están dados dos vectores en $\mathbb{R}^3$:

$$b = \begin{bmatrix} -6 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Considere la matriz M formada por las columnas a y b. Usando operaciones elementales por renglones, reduzca la matriz M a una forma escalonada o pseudoescalonada. Determine el rango de M. Concluya si los vectores a y b son linealmente dependientes o no.

II. Verifique si se cumple la igualdad

$$\big|\langle a, b \rangle\big| = \|a\| \, \|b\|.$$

Ejercicio 18. *5 %.*
Están dados dos vectores en $\mathbb{R}^3$:

$$b = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Considere la matriz M formada por las columnas a y b. Usando operaciones elementales por renglones, reduzca la matriz M a una forma escalonada o pseudoescalonada. Determine el rango de M. Concluya si los vectores a y b son linealmente dependientes o no.

II. Verifique si se cumple la igualdad

$$\big|\langle a, b \rangle\big| = \|a\| \, \|b\|.$$

Análisis Funcional, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 2. Variante 0.

Espacios con producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *5 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 24, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 25, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 69,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 36, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 33, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 29.$$

Ejercicio 2. *5 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

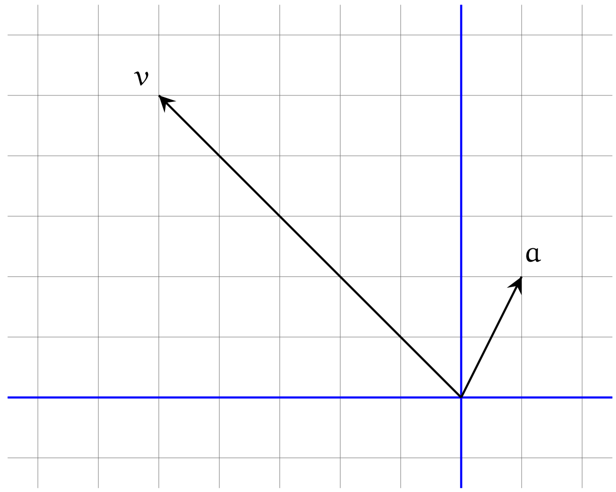
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *5 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *5 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *5 %.*
Está dado un vector $a \in \mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** P_a y la **matriz de reflexión ortogonal** H_a. Verifique que las matrices P_a y H_a son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_a a, \qquad P_a^2, \qquad H_a a, \qquad H_a^2.$$

Ejercicio 6. *5 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^2$:

$$v = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_a v = \|v\| e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_2$ y $H_a v = \|v\| e_1$.

Ejercicio 7. *5 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^3$:

$$v = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_a v = \|v\| e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_3$ y $H_a v = \|v\| e_1$.

Ejercicio 8. *5 %.*
Sean $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ algunos vectores del espacio $\mathbb{R}^5$ tales que

$$b_1 = \frac{a_1}{9}, \qquad b_2 = \frac{a_2 - 3b_1}{7}, \qquad b_3 = \frac{a_3 - 5b_1 + 6b_2}{8}.$$

I. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3.

II. Encuentre una matriz R tal que $A = BR$, donde A es la matriz formada de las columnas a_1, a_2, a_3, y B es la matriz formada de las columnas b_1, b_2, b_3.

Ejercicio 9. *6 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -8 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ -12 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *6 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 20 \\ -4 \\ -18 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *8 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 5 & 9 & -17 \\ 4 & 3 & -15 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *10 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle \coloneqq \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\ dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	2	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{7}$

donde $\quad I_p \coloneqq \int_{-1}^{1} x^p\ dx.$

Ejercicio 13. *5 %.*
I. En este ejercicio demostramos **el teorema de Pitágoras** y un poco más. Sea H un espacio vectorial real con producto interno y sean $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathsf{H}$. Demuestre que

$$\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\|^2 = \|\mathfrak{a}\|^2 + \|\mathfrak{b}\|^2.$$

II. Construya en $\mathbb{R}^3$ dos vectores $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ con componentes enteras no nulas, de tal manera que $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ sean ortogonales. Calcule su producto interno. Calcule las normas $\|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\|$, $\|\mathfrak{a}\|$, $\|\mathfrak{b}\|$ y la expresión $\|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\|^2 - \|\mathfrak{a}\|^2 - \|\mathfrak{b}\|^2$.

III. Construya en $\mathbb{R}^3$ dos vectores $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ con componentes enteras no nulas, de tal manera que $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ no sean ortogonales. Calcule su producto interno. Calcule las normas $\|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\|$, $\|\mathfrak{a}\|$, $\|\mathfrak{b}\|$ y la expresión $\|\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\|^2 - \|\mathfrak{a}\|^2 - \|\mathfrak{b}\|^2$.

Ejercicio 14. *5 %.*
I. Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno. Demuestre que la norma inducida por el producto interno satisface la identidad de paralelogramo.

II. Demuestre que en el espacio ℓ^∞ no existe ningún producto interno que induzca la norma de este espacio.

Ejercicio 15. *5 %.*
Están dados dos vectores en $\mathbb{R}^2$:

$$\mathfrak{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathfrak{b} = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Denotemos por $\mathfrak{m}$ al vector $\frac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$.

I. Calcule $\mathfrak{m}$ de manera explícita, luego calcule $\|\mathfrak{m}\|$.

II. Calcule $\|\mathfrak{a}\|$, $\|\mathfrak{b}\|$, $\|\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\|$. Calcule $\|\mathfrak{m}\|$ usando el teorema de Apolonio.

Ejercicio 16. *5 %.*
Criterio de igualdad en la desigualdad de Schwarz, demostración. Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno y sean $a, b \in H$. Supongamos que $a \neq 0_H$ y que

$$|\langle a, b\rangle| = \|a\|\,\|b\|.$$

Pongamos

$$\lambda := \frac{\langle b, a\rangle}{\|a\|^2}, \qquad u := \lambda a, \qquad w := b - u.$$

I. Demuestre que $w \perp a$. Demuestre que $u \perp w$.

II. Usando la suposición (la "igualdad de Schwarz") exprese λ y $\|u\|$ en términos de $\|a\|$ y $\|b\|$.

III. Aplique el teorema de Pitágoras a los vectores u, w, b.

IV. Muestre que b es un múltiplo de a.

Ejercicio 17. *5 %.*
Están dados dos vectores en $\mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

I. Considere la matriz M formada por las columnas a y b. Usando operaciones elementales por renglones, reduzca la matriz M a una forma escalonada o pseudoescalonada. Determine el rango de M. Concluya si los vectores a y b son linealmente dependientes o no.

II. Verifique si se cumple la igualdad

$$\big|\langle a, b\rangle\big| = \|a\|\,\|b\|.$$

Ejercicio 18. *5 %.*
Están dados dos vectores en $\mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

I. Considere la matriz M formada por las columnas a y b. Usando operaciones elementales por renglones, reduzca la matriz M a una forma escalonada o pseudoescalonada. Determine el rango de M. Concluya si los vectores a y b son linealmente dependientes o no.

II. Verifique si se cumple la igualdad

$$\big|\langle a, b\rangle\big| = \|a\|\,\|b\|.$$

Análisis Funcional, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 2. Variante 1.

Espacios con producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *5 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 38, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 21, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 17,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 22, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 9, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 17.$$

Ejercicio 2. *5 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

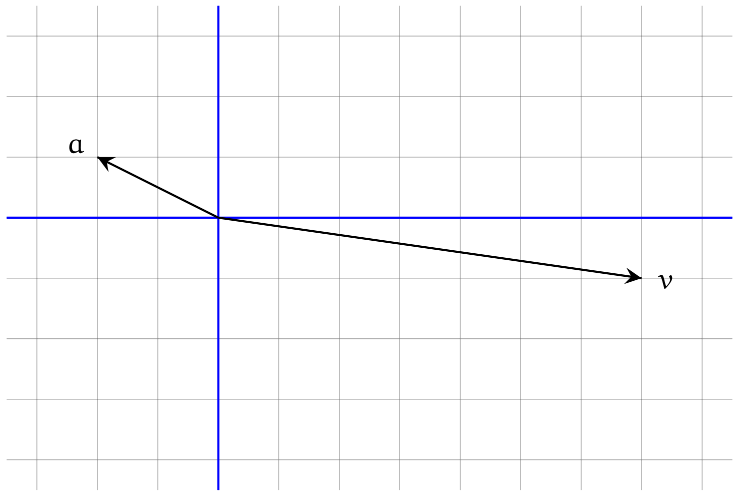
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *5 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad \text{y} \quad v = u + w.$

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a.$



Ejercicio 4. *5 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 7 \\ -9 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2.$

Ejercicio 5. *5 %.*
Está dado un vector $a \in \mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** P_a y la **matriz de reflexión ortogonal** H_a. Verifique que las matrices P_a y H_a son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_a a, \qquad P_a^2, \qquad H_a a, \qquad H_a^2.$$

Ejercicio 6. *5 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^2$:

$$v = \begin{bmatrix} -12 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_a v = \|v\| e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_2$ y $H_a v = \|v\| e_1$.

Ejercicio 7. *5 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^3$:

$$v = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_a v = \|v\| e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_3$ y $H_a v = \|v\| e_1$.

Ejercicio 8. *5 %.*
Sean $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ algunos vectores del espacio $\mathbb{R}^5$ tales que

$$b_1 = \frac{a_1}{6}, \qquad b_2 = \frac{a_2 - 2b_1}{3}, \qquad b_3 = \frac{a_3 + 9b_1 - b_2}{5}.$$

I. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3.

II. Encuentre una matriz R tal que $A = BR$, donde A es la matriz formada de las columnas a_1, a_2, a_3, y B es la matriz formada de las columnas b_1, b_2, b_3.

Ejercicio 9. *6 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *6 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \\ -2 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *8 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 4 & 5 & 17 \\ 2 & 6 & -5 \\ -5 & -1 & -30 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *10 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle \coloneqq \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	π	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{3\pi}{8}$	0	$\frac{5\pi}{16}$

donde $\quad I_p \coloneqq \displaystyle\int_{-1}^{1} x^p\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

Ejercicio 13. *5 %.*
I. En este ejercicio demostramos **el teorema de Pitágoras** y un poco más. Sea H un espacio vectorial real con producto interno y sean $a, b \in \mathsf{H}$. Demuestre que

$$a \perp b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

II. Construya en $\mathbb{R}^3$ dos vectores a, b con componentes enteras no nulas, de tal manera que a y b sean ortogonales. Calcule su producto interno. Calcule las normas $\|a+b\|$, $\|a\|$, $\|b\|$ y la expresión $\|a+b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2$.

III. Construya en $\mathbb{R}^3$ dos vectores a, b con componentes enteras no nulas, de tal manera que a y b no sean ortogonales. Calcule su producto interno. Calcule las normas $\|a+b\|$, $\|a\|$, $\|b\|$ y la expresión $\|a+b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2$.

Ejercicio 14. *5 %.*
I. Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno. Demuestre que la norma inducida por el producto interno satisface la identidad de paralelogramo.

II. Demuestre que en el espacio $\mathsf{L}^1([0,1])$ no existe ningún producto interno que induzca la norma de este espacio.

Ejercicio 15. *5 %.*
Están dados dos vectores en $\mathbb{R}^2$:

$$a = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Denotemos por m al vector $\frac{1}{2}(a+b)$.

I. Calcule m de manera explícita, luego calcule $\|m\|$.

II. Calcule $\|a\|$, $\|b\|$, $\|a-b\|$. Calcule $\|m\|$ usando el teorema de Apolonio.

Ejercicio 16. *5 %.*
Criterio de igualdad en la desigualdad de Schwarz, demostración. Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno y sean $a, b \in H$. Supongamos que $a \neq 0_H$ y que

$$|\langle a, b\rangle| = \|a\|\,\|b\|.$$

Pongamos

$$\lambda \coloneqq \frac{\langle b, a\rangle}{\|a\|^2}, \qquad u \coloneqq \lambda a, \qquad w \coloneqq b - u.$$

I. Demuestre que $w \perp a$. Demuestre que $u \perp w$.

II. Usando la suposición (la "igualdad de Schwarz") exprese λ y $\|u\|$ en términos de $\|a\|$ y $\|b\|$.

III. Aplique el teorema de Pitágoras a los vectores u, w, b.

IV. Muestre que b es un múltiplo de a.

Ejercicio 17. *5 %.*
Están dados dos vectores en $\mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} 10 \\ 14 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 15 \\ 21 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

I. Considere la matriz M formada por las columnas a y b. Usando operaciones elementales por renglones, reduzca la matriz M a una forma escalonada o pseudoescalonada. Determine el rango de M. Concluya si los vectores a y b son linealmente dependientes o no.

II. Verifique si se cumple la igualdad

$$\bigl|\langle a, b\rangle\bigr| = \|a\|\,\|b\|.$$

Ejercicio 18. *5 %.*
Están dados dos vectores en $\mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Considere la matriz M formada por las columnas a y b. Usando operaciones elementales por renglones, reduzca la matriz M a una forma escalonada o pseudoescalonada. Determine el rango de M. Concluya si los vectores a y b son linealmente dependientes o no.

II. Verifique si se cumple la igualdad

$$\bigl|\langle a, b\rangle\bigr| = \|a\|\,\|b\|.$$

Análisis Funcional, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 2. Variante 2.

Espacios con producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *5 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 25, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 54, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 5,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 41, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 42, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 101.$$

Ejercicio 2. *5 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 11 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

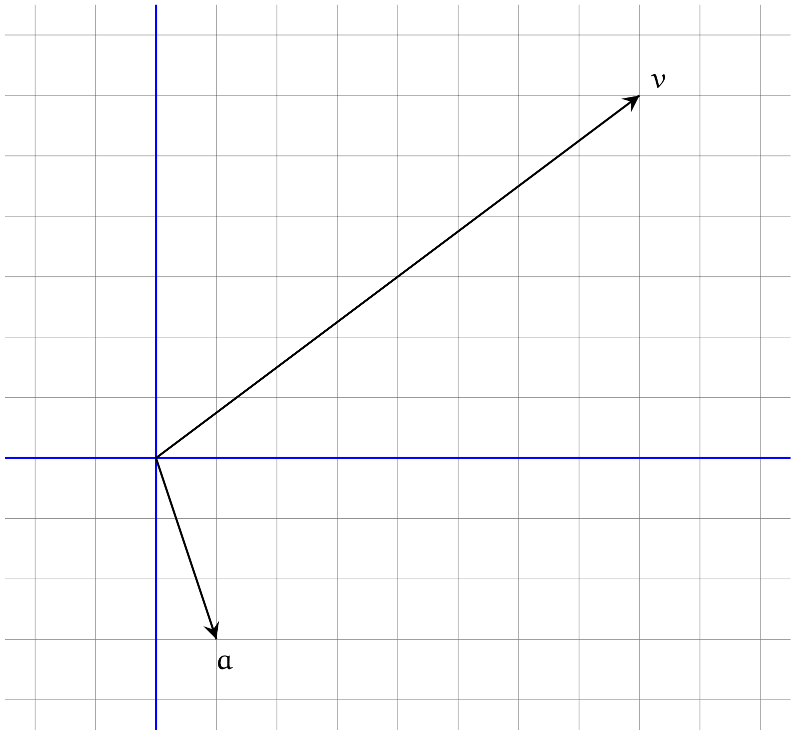
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *5 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *5 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -11 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^{\perp}$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *5 %.*
Está dado un vector $a \in \mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** P_a y la **matriz de reflexión ortogonal** H_a. Verifique que las matrices P_a y H_a son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_a a, \qquad P_a^2, \qquad H_a a, \qquad H_a^2.$$

Ejercicio 6. *5 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^2$:

$$v = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_a v = \|v\|\, e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_2$ y $H_a v = \|v\|\, e_1$.

Ejercicio 7. *5 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^3$:

$$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_a v = \|v\|\, e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_3$ y $H_a v = \|v\|\, e_1$.

Ejercicio 8. *5 %.*
Sean $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ algunos vectores del espacio $\mathbb{R}^5$ tales que

$$b_1 = \frac{a_1}{7}, \qquad b_2 = \frac{a_2 - 3b_1}{4}, \qquad b_3 = \frac{a_3 + 2b_1 + 8b_2}{9}.$$

I. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3.

II. Encuentre una matriz R tal que $A = BR$, donde A es la matriz formada de las columnas a_1, a_2, a_3, y B es la matriz formada de las columnas b_1, b_2, b_3.

Ejercicio 9. *6 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 16 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *6 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 11 \\ -7 \\ 18 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *8 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 20 \\ 2 & 0 & -8 \\ 2 & 4 & -5 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *10 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \sqrt{1 - x^2} \, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{16}$	0	$\frac{5\pi}{128}$

donde $$I_p := \int_{-1}^{1} x^p \sqrt{1 - x^2} \, dx.$$

Ejercicio 13. *5 %.*
I. En este ejercicio demostramos **el teorema de Pitágoras** y un poco más. Sea H un espacio vectorial real con producto interno y sean $a, b \in H$. Demuestre que

$$a \perp b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

II. Construya en $\mathbb{R}^3$ dos vectores a, b con componentes enteras no nulas, de tal manera que a y b sean ortogonales. Calcule su producto interno. Calcule las normas $\|a+b\|$, $\|a\|$, $\|b\|$ y la expresión $\|a+b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2$.

III. Construya en $\mathbb{R}^3$ dos vectores a, b con componentes enteras no nulas, de tal manera que a y b no sean ortogonales. Calcule su producto interno. Calcule las normas $\|a+b\|$, $\|a\|$, $\|b\|$ y la expresión $\|a+b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2$.

Ejercicio 14. *5 %.*
I. Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno. Demuestre que la norma inducida por el producto interno satisface la identidad de paralelogramo.

II. Demuestre que en el espacio $C([0,1])$ no existe ningún producto interno que induzca la norma de este espacio.

Ejercicio 15. *5 %.*
Están dados dos vectores en $\mathbb{R}^2$:

$$a = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Denotemos por m al vector $\frac{1}{2}(a+b)$.

I. Calcule m de manera explícita, luego calcule $\|m\|$.

II. Calcule $\|a\|$, $\|b\|$, $\|a-b\|$. Calcule $\|m\|$ usando el teorema de Apolonio.

Ejercicio 16. *5 %.*
Criterio de igualdad en la desigualdad de Schwarz, demostración. Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno y sean $a, b \in H$. Supongamos que $a \neq 0_H$ y que

$$|\langle a, b\rangle| = \|a\|\,\|b\|.$$

Pongamos

$$\lambda := \frac{\langle b, a\rangle}{\|a\|^2}, \qquad u := \lambda a, \qquad w := b - u.$$

I. Demuestre que $w \perp a$. Demuestre que $u \perp w$.

II. Usando la suposición (la "igualdad de Schwarz") exprese λ y $\|u\|$ en términos de $\|a\|$ y $\|b\|$.

III. Aplique el teorema de Pitágoras a los vectores u, w, b.

IV. Muestre que b es un múltiplo de a.

Ejercicio 17. *5 %.*
Están dados dos vectores en $\mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \\ 15 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

I. Considere la matriz M formada por las columnas a y b. Usando operaciones elementales por renglones, reduzca la matriz M a una forma escalonada o pseudoescalonada. Determine el rango de M. Concluya si los vectores a y b son linealmente dependientes o no.

II. Verifique si se cumple la igualdad

$$\big|\langle a, b\rangle\big| = \|a\|\,\|b\|.$$

Ejercicio 18. *5 %.*
Están dados dos vectores en $\mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

I. Considere la matriz M formada por las columnas a y b. Usando operaciones elementales por renglones, reduzca la matriz M a una forma escalonada o pseudoescalonada. Determine el rango de M. Concluya si los vectores a y b son linealmente dependientes o no.

II. Verifique si se cumple la igualdad

$$\big|\langle a, b\rangle\big| = \|a\|\,\|b\|.$$

Análisis Funcional, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 2. Variante 3.

Espacios con producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *5 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 50, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 77, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 27,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 62, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 9, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 83.$$

Ejercicio 2. *5 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -3 \\ -12 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

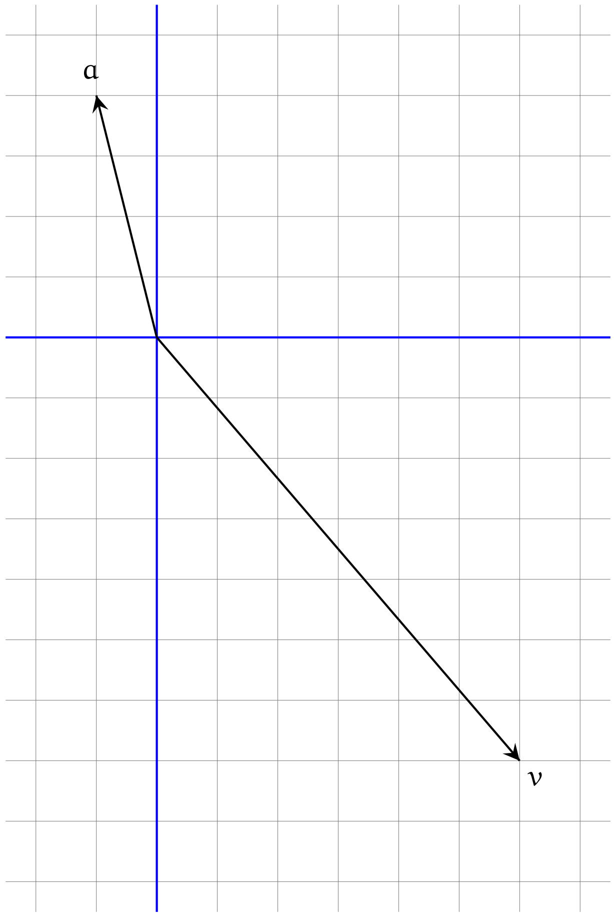
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *5 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w.$

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a.$



Ejercicio 4. *5 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -12 \\ -2 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^{\perp}$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2.$

Ejercicio 5. *5 %.*
Está dado un vector $a \in \mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** P_a y la **matriz de reflexión ortogonal** H_a. Verifique que las matrices P_a y H_a son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_a a, \qquad P_a^2, \qquad H_a a, \qquad H_a^2.$$

Ejercicio 6. *5 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^2$:

$$v = \begin{bmatrix} -5 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_a v = \|v\| e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_2$ y $H_a v = \|v\| e_1$.

Ejercicio 7. *5 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^3$:

$$v = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_a v = \|v\| e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_3$ y $H_a v = \|v\| e_1$.

Ejercicio 8. *5 %.*
Sean $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ algunos vectores del espacio $\mathbb{R}^5$ tales que

$$b_1 = \frac{a_1}{7}, \qquad b_2 = \frac{a_2 - 6b_1}{8}, \qquad b_3 = \frac{a_3 - 9b_1 + 4b_2}{3}.$$

I. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3.

II. Encuentre una matriz R tal que $A = BR$, donde A es la matriz formada de las columnas a_1, a_2, a_3, y B es la matriz formada de las columnas b_1, b_2, b_3.

Ejercicio 9. *6 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 13 \\ 11 \\ -12 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *6 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -21 \\ 6 \\ -3 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *8 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 16 \\ 4 & 2 & 10 \\ 5 & 7 & 30 \\ -2 & -6 & -19 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *10 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x)\, e^{-x^2}\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\sqrt{\pi}$	0	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	0	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	0	$\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$

donde $\quad I_p := \int_{-\infty}^{\infty} x^p\, e^{-x^2}\, dx.$

Ejercicio 13. *5 %.*

I. En este ejercicio demostramos **el teorema de Pitágoras** y un poco más. Sea H un espacio vectorial real con producto interno y sean $a, b \in H$. Demuestre que

$$a \perp b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

II. Construya en $\mathbb{R}^3$ dos vectores a, b con componentes enteras no nulas, de tal manera que a y b sean ortogonales. Calcule su producto interno. Calcule las normas $\|a+b\|$, $\|a\|$, $\|b\|$ y la expresión $\|a+b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2$.

III. Construya en $\mathbb{R}^3$ dos vectores a, b con componentes enteras no nulas, de tal manera que a y b no sean ortogonales. Calcule su producto interno. Calcule las normas $\|a+b\|$, $\|a\|$, $\|b\|$ y la expresión $\|a+b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2$.

Ejercicio 14. *5 %.*

I. Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno. Demuestre que la norma inducida por el producto interno satisface la identidad de paralelogramo.

II. Sea V el espacio vectorial de polinomios de grado $\leqslant 3$ con coeficientes reales o complejos, con la siguiente norma:

$$\text{si } f(t) = \sum_{k=0}^{3} a_k t^k, \qquad \|f\| \coloneqq \sum_{k=0}^{3} \frac{|a_k|}{k!}.$$

Demuestre que en V no existe ningún producto interno que induzca esta norma.

Ejercicio 15. *5 %.*

Están dados dos vectores en $\mathbb{R}^2$:

$$a = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Denotemos por m al vector $\frac{1}{2}(a+b)$.

I. Calcule m de manera explícita, luego calcule $\|m\|$.

II. Calcule $\|a\|$, $\|b\|$, $\|a-b\|$. Calcule $\|m\|$ usando el teorema de Apolonio.

Ejercicio 16. *5 %.*
Criterio de igualdad en la desigualdad de Schwarz, demostración. Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno y sean $a, b \in H$. Supongamos que $a \neq 0_H$ y que

$$|\langle a, b\rangle| = \|a\|\,\|b\|.$$

Pongamos

$$\lambda \coloneqq \frac{\langle b, a\rangle}{\|a\|^2}, \qquad u \coloneqq \lambda a, \qquad w \coloneqq b - u.$$

I. Demuestre que $w \perp a$. Demuestre que $u \perp w$.

II. Usando la suposición (la "igualdad de Schwarz") exprese λ y $\|u\|$ en términos de $\|a\|$ y $\|b\|$.

III. Aplique el teorema de Pitágoras a los vectores u, w, b.

IV. Muestre que b es un múltiplo de a.

Ejercicio 17. *5 %.*
Están dados dos vectores en $\mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} 14 \\ 21 \\ -14 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

I. Considere la matriz M formada por las columnas a y b. Usando operaciones elementales por renglones, reduzca la matriz M a una forma escalonada o pseudoescalonada. Determine el rango de M. Concluya si los vectores a y b son linealmente dependientes o no.

II. Verifique si se cumple la igualdad

$$\big|\langle a, b\rangle\big| = \|a\|\,\|b\|.$$

Ejercicio 18. *5 %.*
Están dados dos vectores en $\mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

I. Considere la matriz M formada por las columnas a y b. Usando operaciones elementales por renglones, reduzca la matriz M a una forma escalonada o pseudoescalonada. Determine el rango de M. Concluya si los vectores a y b son linealmente dependientes o no.

II. Verifique si se cumple la igualdad

$$\big|\langle a, b\rangle\big| = \|a\|\,\|b\|.$$

Análisis Funcional, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.
Tarea 2. Variante 4.

Espacios con producto interno.

Nombre: Calificación (%):

Las tareas se resuelven en casa en hojas de tamaño carta y se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. *5 %.*
Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(a_1, a_2, a_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\|a_1 + a_2\|^2 = 17, \qquad \|a_1 + a_3\|^2 = 26, \qquad \|a_2 + a_3\|^2 = 61,$$
$$\|a_1 - a_2\|^2 = 85, \qquad \|a_1 - a_3\|^2 = 34, \qquad \|a_2 - a_3\|^2 = 13.$$

Ejercicio 2. *5 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -11 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores a_1, a_2, a_3 son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$.

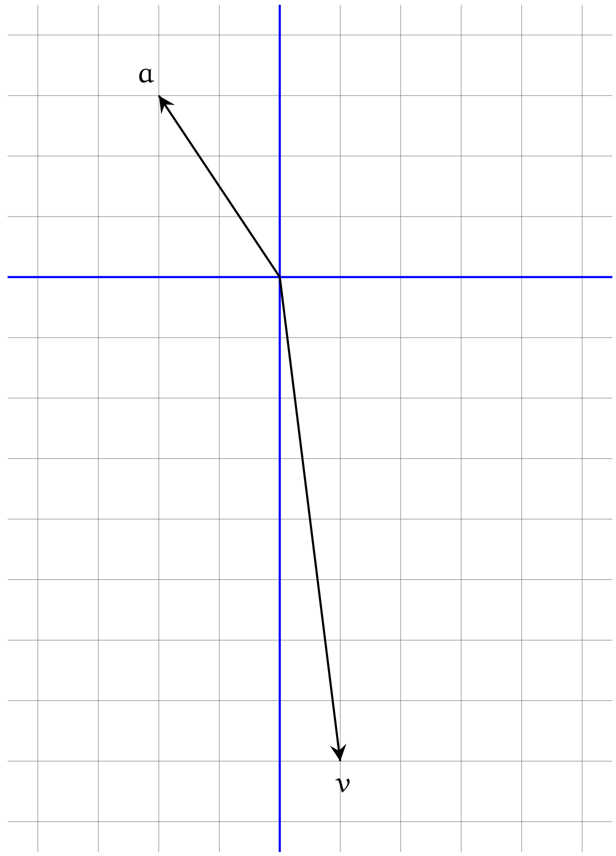
IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

$$\|b\|^2 = |\lambda_1|^2 \|a_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|a_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|a_3\|^2.$$

Ejercicio 3. *5 %.*
En el plano castesiano $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores a y v.

I. Halle dos vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\quad u \in \ell(a), \quad w \perp a \quad$ y $\quad v = u + w$.

II. Muestre u y w en el dibujo y haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a$.



Ejercicio 4. *5 %.*
En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} -3 \\ -10 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que $a_1 \perp a_2$ y calcule las normas $\|a_1\|$ y $\|a_2\|$.

II. Halle dos vectores $u \in S$ y $w \in S^\perp$ tales que $v = u + w$, donde S es el subespacio generado por a_1 y a_2.

III. Haga las comprobaciones: $\quad \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2, \quad w \perp a_1, \quad w \perp a_2$.

Ejercicio 5. *5 %.*
Está dado un vector $a \in \mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** P_a y la **matriz de reflexión ortogonal** H_a. Verifique que las matrices P_a y H_a son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_a a, \qquad P_a^2, \qquad H_a a, \qquad H_a^2.$$

Ejercicio 6. *5 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^2$:

$$v = \begin{bmatrix} 12 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_a v = \|v\|\, e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_2$ y $H_a v = \|v\|\, e_1$.

Ejercicio 7. *5 %.*
Está dado un vector $v \in \mathbb{R}^3$:

$$v = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector v. En otras palabras, calcule un vector $a \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_a v = \|v\|\, e_1$, donde e_1 es el primer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Calcule la matriz H_a. Compruebe que $H_a^2 = I_3$ y $H_a v = \|v\|\, e_1$.

Ejercicio 8. *5 %.*
Sean $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ algunos vectores del espacio $\mathbb{R}^5$ tales que

$$b_1 = \frac{a_1}{7}, \qquad b_2 = \frac{a_2 - 2b_1}{9}, \qquad b_3 = \frac{a_3 - 6b_1 + 8b_2}{4}.$$

I. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3.

II. Encuentre una matriz R tal que $A = BR$, donde A es la matriz formada de las columnas a_1, a_2, a_3, y B es la matriz formada de las columnas b_1, b_2, b_3.

Ejercicio 9. *6 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ -4 \\ -18 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 10. *6 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores a_1, a_2, a_3 son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos b_1, b_2, b_3 son ortogonales calcule su matriz de Gram $G(b_1, b_2, b_3)$. Escriba cada uno de los vectores a_1, a_2, a_3 como una combinación lineal de los vectores b_1, b_2, b_3 y viceversa.

$$a_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 22 \\ -1 \\ 7 \\ -13 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. *8 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -9 & 21 \\ 4 & -3 & 7 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. *10 %.*
Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g\rangle := \int_0^{+\infty} f(x)g(x)\, e^{-x}\, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	1	1	2	6	24	120	720

donde $\qquad I_p := \int_0^{+\infty} x^p\, e^{-x}\, dx.$

Ejercicio 13. *5 %.*
I. En este ejercicio demostramos **el teorema de Pitágoras** y un poco más. Sea H un espacio vectorial real con producto interno y sean $a, b \in H$. Demuestre que

$$a \perp b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

II. Construya en $\mathbb{R}^3$ dos vectores a, b con componentes enteras no nulas, de tal manera que a y b sean ortogonales. Calcule su producto interno. Calcule las normas $\|a + b\|$, $\|a\|$, $\|b\|$ y la expresión $\|a + b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2$.

III. Construya en $\mathbb{R}^3$ dos vectores a, b con componentes enteras no nulas, de tal manera que a y b no sean ortogonales. Calcule su producto interno. Calcule las normas $\|a + b\|$, $\|a\|$, $\|b\|$ y la expresión $\|a + b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2$.

Ejercicio 14. *5 %.*
I. Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno. Demuestre que la norma inducida por el producto interno satisface la identidad de paralelogramo.

II. Sea V el espacio vectorial de polinomios de grado $\leqslant 3$ con coeficientes reales o complejos, con la siguiente norma:

$$\|f\| \coloneqq \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|.$$

Demuestre que en V no existe ningún producto interno que induzca esta norma.

Ejercicio 15. *5 %.*
Están dados dos vectores en $\mathbb{R}^2$:

$$a = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Denotemos por m al vector $\frac{1}{2}(a + b)$.

I. Calcule m de manera explícita, luego calcule $\|m\|$.

II. Calcule $\|a\|$, $\|b\|$, $\|a - b\|$. Calcule $\|m\|$ usando el teorema de Apolonio.

Ejercicio 16. *5 %.*
Criterio de igualdad en la desigualdad de Schwarz, demostración. Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno y sean $a, b \in \mathrm{H}$. Supongamos que $a \neq 0_{\mathrm{H}}$ y que

$$|\langle a, b\rangle| = \|a\|\,\|b\|.$$

Pongamos

$$\lambda \coloneqq \frac{\langle b, a\rangle}{\|a\|^2}, \qquad u \coloneqq \lambda a, \qquad w \coloneqq b - u.$$

I. Demuestre que $w \perp a$. Demuestre que $u \perp w$.

II. Usando la suposición (la "igualdad de Schwarz") exprese λ y $\|u\|$ en términos de $\|a\|$ y $\|b\|$.

III. Aplique el teorema de Pitágoras a los vectores u, w, b.

IV. Muestre que b es un múltiplo de a.

Ejercicio 17. *5 %.*
Están dados dos vectores en $\mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} 15 \\ 25 \\ -10 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -12 \\ -20 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

I. Considere la matriz M formada por las columnas a y b. Usando operaciones elementales por renglones, reduzca la matriz M a una forma escalonada o pseudoescalonada. Determine el rango de M. Concluya si los vectores a y b son linealmente dependientes o no.

II. Verifique si se cumple la igualdad

$$\big|\langle a, b\rangle\big| = \|a\|\,\|b\|.$$

Ejercicio 18. *5 %.*
Están dados dos vectores en $\mathbb{R}^3$:

$$a = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

I. Considere la matriz M formada por las columnas a y b. Usando operaciones elementales por renglones, reduzca la matriz M a una forma escalonada o pseudoescalonada. Determine el rango de M. Concluya si los vectores a y b son linealmente dependientes o no.

II. Verifique si se cumple la igualdad

$$\big|\langle a, b\rangle\big| = \|a\|\,\|b\|.$$