

Análisis Funcional, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.

Tarea. Variante α .

Espacios con producto interno.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 5 %.

Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\|^2 &= 84, & \|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3\|^2 &= 65, & \|\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3\|^2 &= 101, \\ \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\|^2 &= 8, & \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3\|^2 &= 49, & \|\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3\|^2 &= 21. \end{aligned}$$

Ejercicio 2. 5 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3$.

IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

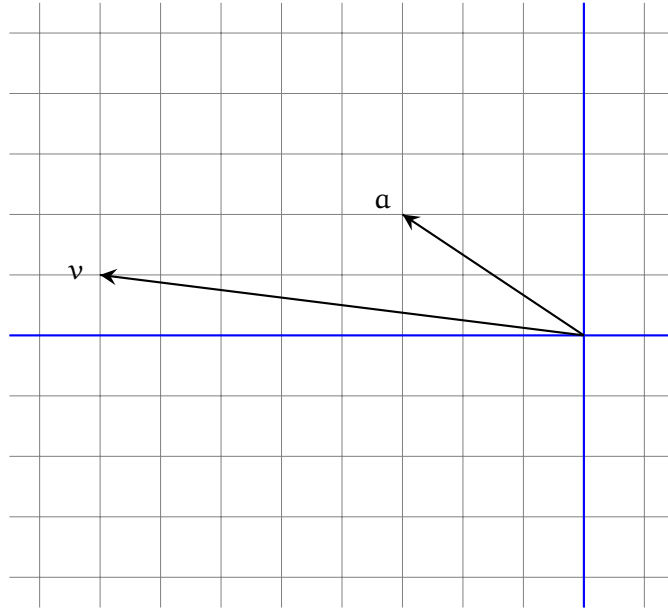
$$\|\mathbf{b}\|^2 = |\lambda_1|^2 \|\mathbf{a}_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|\mathbf{a}_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|\mathbf{a}_3\|^2.$$

Ejercicio 3. 5 %.

En el plano cartesiano \mathbb{R}^2 están dados dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{v} .

I. Halle dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{u} \in \ell(\mathbf{a})$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

II. Muestre \mathbf{u} y \mathbf{w} en el dibujo y haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$.



Ejercicio 4. 5 %.

En el espacio $V = \mathbb{R}^3$ con el producto interno usual consideramos dos vectores:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

Muestre que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \neq 0$. Encuentre λ en \mathbb{R} tal que

$$\|\lambda \mathbf{a} + \mathbf{b}\| < \|\mathbf{b}\|.$$

Ejercicio 5. 5 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$ y calcule las normas $\|\mathbf{a}_1\|$ y $\|\mathbf{a}_2\|$.
- II. Halle dos vectores $\mathbf{u} \in S$ y $\mathbf{w} \in S^\perp$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, donde S es el subespacio generado por \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 .
- III. Haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_1$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_2$.

Ejercicio 6. 5 %.

Está dado un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** $P_{\mathbf{a}}$ y la **matriz de reflexión ortogonal** $H_{\mathbf{a}}$. Verifique que las matrices $P_{\mathbf{a}}$ y $H_{\mathbf{a}}$ son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad P_{\mathbf{a}}^2, \quad H_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad H_{\mathbf{a}}^2.$$

Ejercicio 7. 5 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_2$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 8. 5 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_3$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 9. 5%.

Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ algunos vectores del espacio \mathbb{R}^5 tales que

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{3}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 + 4\mathbf{b}_1}{8}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_3 - 6\mathbf{b}_1 - 9\mathbf{b}_2}{2}.$$

- I. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.
- II. Encuentre una matriz \mathbf{R} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{BR}$, donde \mathbf{A} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, y \mathbf{B} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

Ejercicio 10. 6%.

Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ son ortogonales calcule su matriz de Gram $\mathbf{G}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ y viceversa.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -22 \\ -8 \\ -1 \\ -16 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. 6%.

Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ son ortogonales calcule su matriz de Gram $\mathbf{G}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ y viceversa.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -10 \\ 2 \\ -13 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. 8%.

Construya una factorización QR de la matriz dada \mathbf{A} usando el **algoritmo de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{I}_3$, $\mathbf{QR} = \mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 4 & -8 & 19 \\ 2 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. 10 %.

Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x) \, dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$

donde $I_p := \int_0^1 x^p \, dx.$

Ejercicio 14. 5 %.

I. En este ejercicio demostramos **el teorema de Pitágoras** y un poco más. Sea H un espacio vectorial real con producto interno y sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H$. Demuestre que

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2.$$

II. Construya en \mathbb{R}^3 dos vectores \mathbf{a}, \mathbf{b} con componentes enteras no nulas, de tal manera que \mathbf{a} y \mathbf{b} sean ortogonales. Calcule su producto interno. Calcule las normas $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$, $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$ y la expresión $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2$.

III. Construya en \mathbb{R}^3 dos vectores \mathbf{a}, \mathbf{b} con componentes enteras no nulas, de tal manera que \mathbf{a} y \mathbf{b} no sean ortogonales. Calcule su producto interno. Calcule las normas $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$, $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$ y la expresión $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2$.

Ejercicio 15. 5 %.

I. Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno. Demuestre que la norma inducida por el producto interno satisface la identidad de paralelogramo.

II. Demuestre que en el espacio ℓ^1 no existe ningún producto interno que induzca la norma de este espacio.

Ejercicio 16. 5 %.

Están dados dos vectores en \mathbb{R}^2 :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Denotemos por \mathbf{m} al vector $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

I. Calcule \mathbf{m} de manera explícita, luego calcule $\|\mathbf{m}\|$.

II. Calcule $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$, $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$. Calcule $\|\mathbf{m}\|$ usando el teorema de Apolonio.

Ejercicio 17. 5 %.

Criterio de igualdad en la desigualdad de Schwarz, demostración. Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno y sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H$. Supongamos que $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}_H$ y que

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|.$$

Pongamos

$$\lambda := \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle}{\|\mathbf{a}\|^2}, \quad \mathbf{u} := \lambda \mathbf{a}, \quad \mathbf{w} := \mathbf{b} - \mathbf{u}.$$

I. Demuestre que $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$. Demuestre que $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}$.

II. Usando la suposición (la “igualdad de Schwarz”) exprese λ y $\|\mathbf{u}\|$ en términos de $\|\mathbf{a}\|$ y $\|\mathbf{b}\|$.

III. Aplique el teorema de Pitágoras a los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b}$.

IV. Muestre que \mathbf{b} es un múltiplo de \mathbf{a} .

Ejercicio 18. 5 %.

Están dados dos vectores en \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 15 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

I. Considere la matriz M formada por las columnas \mathbf{a} y \mathbf{b} . Usando operaciones elementales por renglones, reduzca la matriz M a una forma escalonada o pseudoescalonada. Determine el rango de M . Concluya si los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} son linealmente dependientes o no.

II. Verifique si se cumple la igualdad

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|.$$

Ejercicio 19. 5 %.

Están dados dos vectores en \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

I. Considere la matriz M formada por las columnas \mathbf{a} y \mathbf{b} . Usando operaciones elementales por renglones, reduzca la matriz M a una forma escalonada o pseudoescalonada. Determine el rango de M . Concluya si los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} son linealmente dependientes o no.

II. Verifique si se cumple la igualdad

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|.$$

Análisis Funcional, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.

Tarea. Variante β .

Espacios con producto interno.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 5 %.

Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\|^2 &= 41, & \|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3\|^2 &= 5, & \|\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3\|^2 &= 38, \\ \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\|^2 &= 25, & \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3\|^2 &= 9, & \|\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3\|^2 &= 38. \end{aligned}$$

Ejercicio 2. 5 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3$.

IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

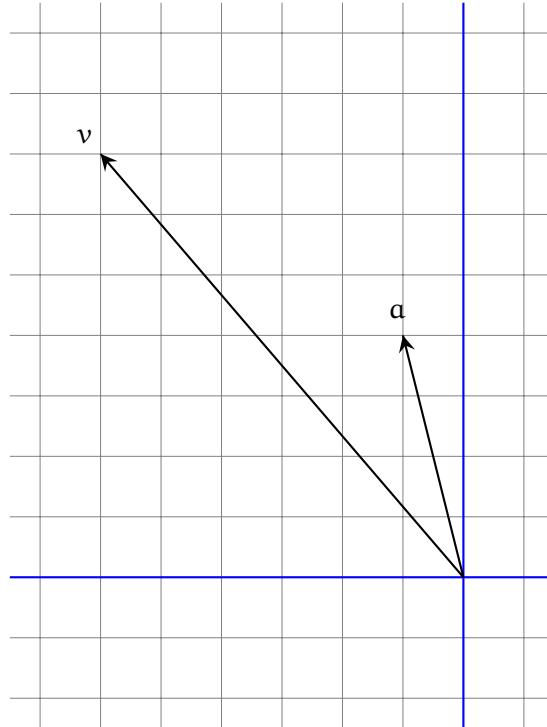
$$\|\mathbf{b}\|^2 = |\lambda_1|^2 \|\mathbf{a}_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|\mathbf{a}_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|\mathbf{a}_3\|^2.$$

Ejercicio 3. 5%.

En el plano cartesiano \mathbb{R}^2 están dados dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{v} .

I. Halle dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{u} \in \ell(\mathbf{a})$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

II. Muestre \mathbf{u} y \mathbf{w} en el dibujo y haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$.



Ejercicio 4. 5%.

En el espacio $V = \mathbb{R}^3$ con el producto interno usual consideramos dos vectores:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 22 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Muestre que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \neq 0$. Encuentre λ en \mathbb{R} tal que

$$\|\lambda \mathbf{a} + \mathbf{b}\| < \|\mathbf{b}\|.$$

Ejercicio 5. 5 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$ y calcule las normas $\|\mathbf{a}_1\|$ y $\|\mathbf{a}_2\|$.
- II. Halle dos vectores $\mathbf{u} \in S$ y $\mathbf{w} \in S^\perp$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, donde S es el subespacio generado por \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 .
- III. Haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_1$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_2$.

Ejercicio 6. 5 %.

Está dado un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** $P_{\mathbf{a}}$ y la **matriz de reflexión ortogonal** $H_{\mathbf{a}}$. Verifique que las matrices $P_{\mathbf{a}}$ y $H_{\mathbf{a}}$ son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad P_{\mathbf{a}}^2, \quad H_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad H_{\mathbf{a}}^2.$$

Ejercicio 7. 5 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_2$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 8. 5 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_3$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 9. 5%.

Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ algunos vectores del espacio \mathbb{R}^5 tales que

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{8}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 - 3\mathbf{b}_1}{2}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_3 + 9\mathbf{b}_1 - 9\mathbf{b}_2}{5}.$$

- I. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.
 II. Encuentre una matriz \mathbf{R} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}$, donde \mathbf{A} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, y \mathbf{B} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

Ejercicio 10. 6%.

Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ son ortogonales calcule su matriz de Gram $\mathbf{G}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ y viceversa.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -28 \\ 18 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. 6%.

Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ son ortogonales calcule su matriz de Gram $\mathbf{G}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ y viceversa.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 21 \\ 8 \\ 22 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. 8%.

Construya una factorización QR de la matriz dada \mathbf{A} usando el **algoritmo de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{I}_3$, $\mathbf{Q}\mathbf{R} = \mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 9 \\ 1 & 5 & 19 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. 10 %.

Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x) (1 - x^2) dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{63}$

donde $I_p := \int_0^1 x^p (1 - x^2) dx.$

Ejercicio 14. 5 %.

I. En este ejercicio demostramos **el teorema de Pitágoras** y un poco más. Sea H un espacio vectorial real con producto interno y sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H$. Demuestre que

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2.$$

II. Construya en \mathbb{R}^3 dos vectores \mathbf{a}, \mathbf{b} con componentes enteras no nulas, de tal manera que \mathbf{a} y \mathbf{b} sean ortogonales. Calcule su producto interno. Calcule las normas $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$, $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$ y la expresión $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2$.

III. Construya en \mathbb{R}^3 dos vectores \mathbf{a}, \mathbf{b} con componentes enteras no nulas, de tal manera que \mathbf{a} y \mathbf{b} no sean ortogonales. Calcule su producto interno. Calcule las normas $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$, $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$ y la expresión $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2$.

Ejercicio 15. 5 %.

I. Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno. Demuestre que la norma inducida por el producto interno satisface la identidad de paralelogramo.

II. Demuestre que en el espacio $BV([0, 1])$ no existe ningún producto interno que induzca la norma de este espacio.

Ejercicio 16. 5 %.

Están dados dos vectores en \mathbb{R}^2 :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Denotemos por \mathbf{m} al vector $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

I. Calcule \mathbf{m} de manera explícita, luego calcule $\|\mathbf{m}\|$.

II. Calcule $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$, $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$. Calcule $\|\mathbf{m}\|$ usando el teorema de Apolonio.

Ejercicio 17. 5 %.

Criterio de igualdad en la desigualdad de Schwarz, demostración. Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno y sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H$. Supongamos que $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}_H$ y que

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|.$$

Pongamos

$$\lambda := \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle}{\|\mathbf{a}\|^2}, \quad \mathbf{u} := \lambda \mathbf{a}, \quad \mathbf{w} := \mathbf{b} - \mathbf{u}.$$

I. Demuestre que $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$. Demuestre que $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}$.

II. Usando la suposición (la “igualdad de Schwarz”) exprese λ y $\|\mathbf{u}\|$ en términos de $\|\mathbf{a}\|$ y $\|\mathbf{b}\|$.

III. Aplique el teorema de Pitágoras a los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b}$.

IV. Muestre que \mathbf{b} es un múltiplo de \mathbf{a} .

Ejercicio 18. 5 %.

Están dados dos vectores en \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -6 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Considere la matriz M formada por las columnas \mathbf{a} y \mathbf{b} . Usando operaciones elementales por renglones, reduzca la matriz M a una forma escalonada o pseudoescalonada. Determine el rango de M . Concluya si los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} son linealmente dependientes o no.

II. Verifique si se cumple la igualdad

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|.$$

Ejercicio 19. 5 %.

Están dados dos vectores en \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Considere la matriz M formada por las columnas \mathbf{a} y \mathbf{b} . Usando operaciones elementales por renglones, reduzca la matriz M a una forma escalonada o pseudoescalonada. Determine el rango de M . Concluya si los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} son linealmente dependientes o no.

II. Verifique si se cumple la igualdad

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|.$$

Análisis Funcional, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.

Tarea. Variante 0.

Espacios con producto interno.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 5 %.

Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\|^2 &= 24, & \|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3\|^2 &= 25, & \|\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3\|^2 &= 69, \\ \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\|^2 &= 36, & \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3\|^2 &= 33, & \|\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3\|^2 &= 29. \end{aligned}$$

Ejercicio 2. 5 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3$.

IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

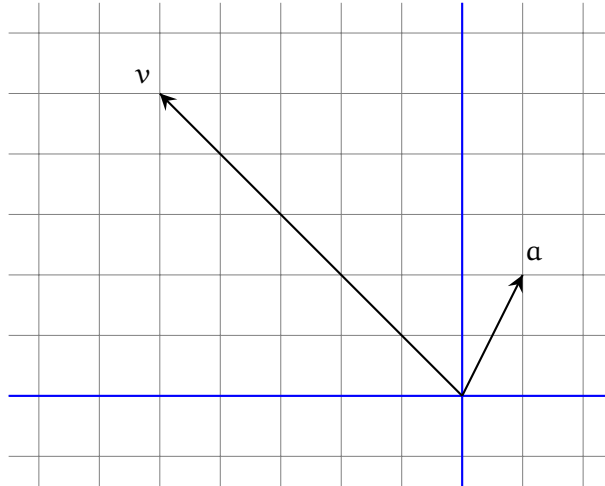
$$\|\mathbf{b}\|^2 = |\lambda_1|^2 \|\mathbf{a}_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|\mathbf{a}_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|\mathbf{a}_3\|^2.$$

Ejercicio 3. 5%.

En el plano cartesiano \mathbb{R}^2 están dados dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{v} .

I. Halle dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{u} \in \ell(\mathbf{a})$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

II. Muestre \mathbf{u} y \mathbf{w} en el dibujo y haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$.



Ejercicio 4. 5%.

En el espacio $V = \mathbb{R}^3$ con el producto interno usual consideramos dos vectores:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Muestre que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \neq 0$. Encuentre λ en \mathbb{R} tal que

$$\|\lambda \mathbf{a} + \mathbf{b}\| < \|\mathbf{b}\|.$$

Ejercicio 5. 5 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$ y calcule las normas $\|\mathbf{a}_1\|$ y $\|\mathbf{a}_2\|$.
- II. Halle dos vectores $\mathbf{u} \in S$ y $\mathbf{w} \in S^\perp$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, donde S es el subespacio generado por \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 .
- III. Haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_1$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_2$.

Ejercicio 6. 5 %.

Está dado un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** $P_{\mathbf{a}}$ y la **matriz de reflexión ortogonal** $H_{\mathbf{a}}$. Verifique que las matrices $P_{\mathbf{a}}$ y $H_{\mathbf{a}}$ son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad P_{\mathbf{a}}^2, \quad H_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad H_{\mathbf{a}}^2.$$

Ejercicio 7. 5 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_2$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 8. 5 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_3$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 9. 5%.

Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ algunos vectores del espacio \mathbb{R}^5 tales que

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{9}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 - 3\mathbf{b}_1}{7}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_3 - 5\mathbf{b}_1 + 6\mathbf{b}_2}{8}.$$

- I. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.
- II. Encuentre una matriz \mathbf{R} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}$, donde \mathbf{A} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, y \mathbf{B} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

Ejercicio 10. 6%.

Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ son ortogonales calcule su matriz de Gram $\mathbf{G}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ y viceversa.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -8 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ -12 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. 6%.

Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ son ortogonales calcule su matriz de Gram $\mathbf{G}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ y viceversa.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 20 \\ -4 \\ -18 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. 8%.

Construya una factorización QR de la matriz dada \mathbf{A} usando el **algoritmo de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{I}_3$, $\mathbf{Q}\mathbf{R} = \mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 5 & 9 & -17 \\ 4 & 3 & -15 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. 10 %.

Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	2	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{7}$

donde $I_p := \int_{-1}^1 x^p dx.$

Ejercicio 14. 5 %.

I. En este ejercicio demostramos **el teorema de Pitágoras** y un poco más. Sea H un espacio vectorial real con producto interno y sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H$. Demuestre que

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2.$$

II. Construya en \mathbb{R}^3 dos vectores \mathbf{a}, \mathbf{b} con componentes enteras no nulas, de tal manera que \mathbf{a} y \mathbf{b} sean ortogonales. Calcule su producto interno. Calcule las normas $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$, $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$ y la expresión $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2$.

III. Construya en \mathbb{R}^3 dos vectores \mathbf{a}, \mathbf{b} con componentes enteras no nulas, de tal manera que \mathbf{a} y \mathbf{b} no sean ortogonales. Calcule su producto interno. Calcule las normas $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$, $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$ y la expresión $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2$.

Ejercicio 15. 5 %.

I. Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno. Demuestre que la norma inducida por el producto interno satisface la identidad de paralelogramo.

II. Demuestre que en el espacio ℓ^∞ no existe ningún producto interno que induzca la norma de este espacio.

Ejercicio 16. 5 %.

Están dados dos vectores en \mathbb{R}^2 :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Denotemos por \mathbf{m} al vector $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

I. Calcule \mathbf{m} de manera explícita, luego calcule $\|\mathbf{m}\|$.

II. Calcule $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$, $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$. Calcule $\|\mathbf{m}\|$ usando el teorema de Apolonio.

Ejercicio 17. 5 %.

Criterio de igualdad en la desigualdad de Schwarz, demostración. Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno y sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H$. Supongamos que $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}_H$ y que

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|.$$

Pongamos

$$\lambda := \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle}{\|\mathbf{a}\|^2}, \quad \mathbf{u} := \lambda \mathbf{a}, \quad \mathbf{w} := \mathbf{b} - \mathbf{u}.$$

I. Demuestre que $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$. Demuestre que $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}$.

II. Usando la suposición (la “igualdad de Schwarz”) exprese λ y $\|\mathbf{u}\|$ en términos de $\|\mathbf{a}\|$ y $\|\mathbf{b}\|$.

III. Aplique el teorema de Pitágoras a los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b}$.

IV. Muestre que \mathbf{b} es un múltiplo de \mathbf{a} .

Ejercicio 18. 5 %.

Están dados dos vectores en \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

I. Considere la matriz M formada por las columnas \mathbf{a} y \mathbf{b} . Usando operaciones elementales por renglones, reduzca la matriz M a una forma escalonada o pseudoescalonada. Determine el rango de M . Concluya si los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} son linealmente dependientes o no.

II. Verifique si se cumple la igualdad

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|.$$

Ejercicio 19. 5 %.

Están dados dos vectores en \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

I. Considere la matriz M formada por las columnas \mathbf{a} y \mathbf{b} . Usando operaciones elementales por renglones, reduzca la matriz M a una forma escalonada o pseudoescalonada. Determine el rango de M . Concluya si los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} son linealmente dependientes o no.

II. Verifique si se cumple la igualdad

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|.$$

Análisis Funcional, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.

Tarea. Variante 1.

Espacios con producto interno.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 5 %.

Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\|^2 &= 38, & \|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3\|^2 &= 21, & \|\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3\|^2 &= 17, \\ \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\|^2 &= 22, & \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3\|^2 &= 9, & \|\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3\|^2 &= 17. \end{aligned}$$

Ejercicio 2. 5 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3$.

IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

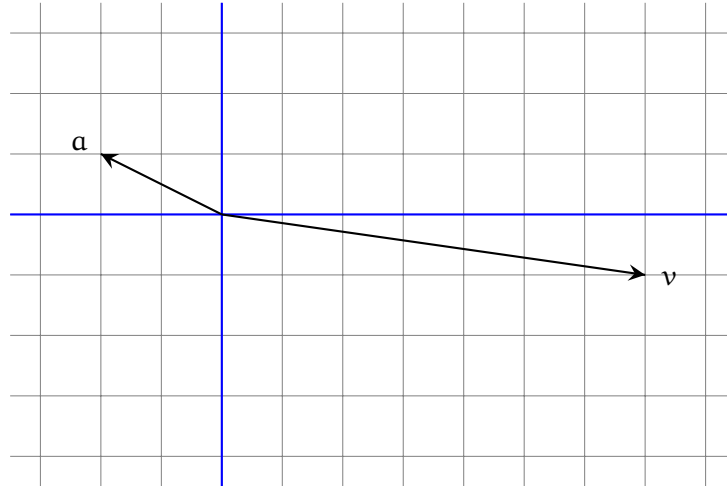
$$\|\mathbf{b}\|^2 = |\lambda_1|^2 \|\mathbf{a}_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|\mathbf{a}_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|\mathbf{a}_3\|^2.$$

Ejercicio 3. 5%.

En el plano cartesiano \mathbb{R}^2 están dados dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{v} .

I. Halle dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{u} \in \ell(\mathbf{a})$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

II. Muestre \mathbf{u} y \mathbf{w} en el dibujo y haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$.



Ejercicio 4. 5%.

En el espacio $V = \mathbb{R}^3$ con el producto interno usual consideramos dos vectores:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -9 \\ -17 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Muestre que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \neq 0$. Encuentre λ en \mathbb{R} tal que

$$\|\lambda \mathbf{a} + \mathbf{b}\| < \|\mathbf{b}\|.$$

Ejercicio 5. 5 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ -9 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$ y calcule las normas $\|\mathbf{a}_1\|$ y $\|\mathbf{a}_2\|$.
- II. Halle dos vectores $\mathbf{u} \in S$ y $\mathbf{w} \in S^\perp$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, donde S es el subespacio generado por \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 .
- III. Haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_1$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_2$.

Ejercicio 6. 5 %.

Está dado un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** $P_{\mathbf{a}}$ y la **matriz de reflexión ortogonal** $H_{\mathbf{a}}$. Verifique que las matrices $P_{\mathbf{a}}$ y $H_{\mathbf{a}}$ son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad P_{\mathbf{a}}^2, \quad H_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad H_{\mathbf{a}}^2.$$

Ejercicio 7. 5 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -12 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_2$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 8. 5 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_3$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 9. 5%.

Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ algunos vectores del espacio \mathbb{R}^5 tales que

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{6}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{b}_1}{3}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_3 + 9\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2}{5}.$$

- I. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.
- II. Encuentre una matriz \mathbf{R} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}$, donde \mathbf{A} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, y \mathbf{B} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

Ejercicio 10. 6%.

Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ son ortogonales calcule su matriz de Gram $\mathbf{G}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ y viceversa.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. 6%.

Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ son ortogonales calcule su matriz de Gram $\mathbf{G}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ y viceversa.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \\ -2 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. 8%.

Construya una factorización QR de la matriz dada \mathbf{A} usando el **algoritmo de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{I}_3$, $\mathbf{Q}\mathbf{R} = \mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 4 & 5 & 17 \\ 2 & 6 & -5 \\ -5 & -1 & -30 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. 10 %.

Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	π	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{3\pi}{8}$	0	$\frac{5\pi}{16}$

donde
$$I_p := \int_{-1}^1 x^p \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Ejercicio 14. 5 %.

I. En este ejercicio demostramos **el teorema de Pitágoras** y un poco más. Sea H un espacio vectorial real con producto interno y sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H$. Demuestre que

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2.$$

II. Construya en \mathbb{R}^3 dos vectores \mathbf{a}, \mathbf{b} con componentes enteras no nulas, de tal manera que \mathbf{a} y \mathbf{b} sean ortogonales. Calcule su producto interno. Calcule las normas $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$, $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$ y la expresión $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2$.

III. Construya en \mathbb{R}^3 dos vectores \mathbf{a}, \mathbf{b} con componentes enteras no nulas, de tal manera que \mathbf{a} y \mathbf{b} no sean ortogonales. Calcule su producto interno. Calcule las normas $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$, $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$ y la expresión $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2$.

Ejercicio 15. 5 %.

I. Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno. Demuestre que la norma inducida por el producto interno satisface la identidad de paralelogramo.

II. Demuestre que en el espacio $L^1([0, 1])$ no existe ningún producto interno que induzca la norma de este espacio.

Ejercicio 16. 5 %.

Están dados dos vectores en \mathbb{R}^2 :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Denotemos por \mathbf{m} al vector $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

I. Calcule \mathbf{m} de manera explícita, luego calcule $\|\mathbf{m}\|$.

II. Calcule $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$, $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$. Calcule $\|\mathbf{m}\|$ usando el teorema de Apolonio.

Ejercicio 17. 5 %.

Criterio de igualdad en la desigualdad de Schwarz, demostración. Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno y sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H$. Supongamos que $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}_H$ y que

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|.$$

Pongamos

$$\lambda := \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle}{\|\mathbf{a}\|^2}, \quad \mathbf{u} := \lambda \mathbf{a}, \quad \mathbf{w} := \mathbf{b} - \mathbf{u}.$$

I. Demuestre que $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$. Demuestre que $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}$.

II. Usando la suposición (la “igualdad de Schwarz”) exprese λ y $\|\mathbf{u}\|$ en términos de $\|\mathbf{a}\|$ y $\|\mathbf{b}\|$.

III. Aplique el teorema de Pitágoras a los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b}$.

IV. Muestre que \mathbf{b} es un múltiplo de \mathbf{a} .

Ejercicio 18. 5 %.

Están dados dos vectores en \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 10 \\ 14 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 15 \\ 21 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

I. Considere la matriz M formada por las columnas \mathbf{a} y \mathbf{b} . Usando operaciones elementales por renglones, reduzca la matriz M a una forma escalonada o pseudoescalonada. Determine el rango de M . Concluya si los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} son linealmente dependientes o no.

II. Verifique si se cumple la igualdad

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|.$$

Ejercicio 19. 5 %.

Están dados dos vectores en \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

I. Considere la matriz M formada por las columnas \mathbf{a} y \mathbf{b} . Usando operaciones elementales por renglones, reduzca la matriz M a una forma escalonada o pseudoescalonada. Determine el rango de M . Concluya si los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} son linealmente dependientes o no.

II. Verifique si se cumple la igualdad

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|.$$

Análisis Funcional, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.

Tarea. Variante 2.

Espacios con producto interno.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 5 %.

Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\|^2 &= 25, & \|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3\|^2 &= 54, & \|\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3\|^2 &= 5, \\ \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\|^2 &= 41, & \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3\|^2 &= 42, & \|\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3\|^2 &= 101. \end{aligned}$$

Ejercicio 2. 5 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 11 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3$.

IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

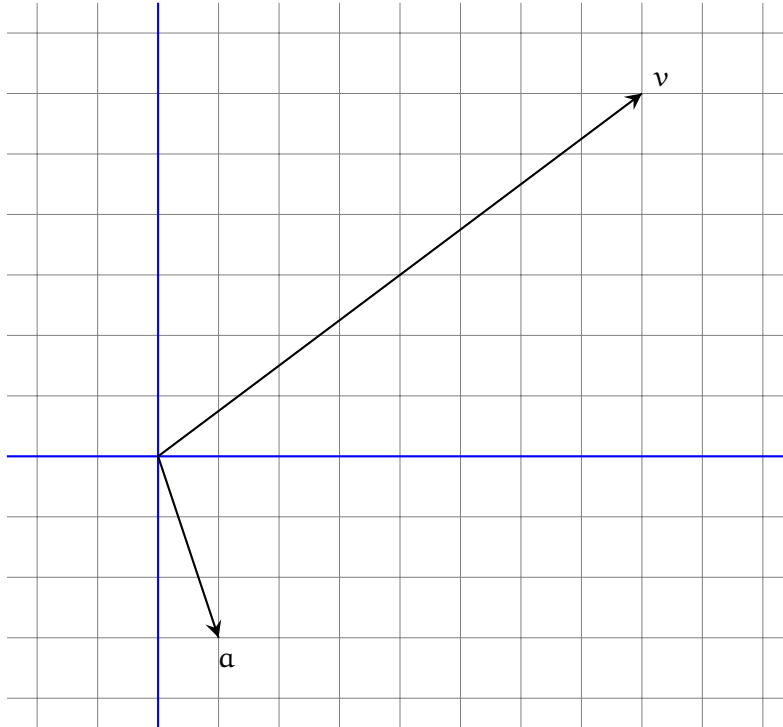
$$\|\mathbf{b}\|^2 = |\lambda_1|^2 \|\mathbf{a}_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|\mathbf{a}_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|\mathbf{a}_3\|^2.$$

Ejercicio 3. 5%.

En el plano cartesiano \mathbb{R}^2 están dados dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{v} .

I. Halle dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{u} \in \ell(\mathbf{a})$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

II. Muestre \mathbf{u} y \mathbf{w} en el dibujo y haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$.



Ejercicio 4. 5%.

En el espacio $V = \mathbb{R}^3$ con el producto interno usual consideramos dos vectores:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 16 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Muestre que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \neq 0$. Encuentre λ en \mathbb{R} tal que

$$\|\lambda \mathbf{a} + \mathbf{b}\| < \|\mathbf{b}\|.$$

Ejercicio 5. 5 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -11 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$ y calcule las normas $\|\mathbf{a}_1\|$ y $\|\mathbf{a}_2\|$.
- II. Halle dos vectores $\mathbf{u} \in S$ y $\mathbf{w} \in S^\perp$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, donde S es el subespacio generado por \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 .
- III. Haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_1$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_2$.

Ejercicio 6. 5 %.

Está dado un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** $P_{\mathbf{a}}$ y la **matriz de reflexión ortogonal** $H_{\mathbf{a}}$. Verifique que las matrices $P_{\mathbf{a}}$ y $H_{\mathbf{a}}$ son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad P_{\mathbf{a}}^2, \quad H_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad H_{\mathbf{a}}^2.$$

Ejercicio 7. 5 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_2$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 8. 5 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_3$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 9. 5%.

Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ algunos vectores del espacio \mathbb{R}^5 tales que

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{7}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 - 3\mathbf{b}_1}{4}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_3 + 2\mathbf{b}_1 + 8\mathbf{b}_2}{9}.$$

- I. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.
- II. Encuentre una matriz \mathbf{R} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}$, donde \mathbf{A} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, y \mathbf{B} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

Ejercicio 10. 6%.

Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ son ortogonales calcule su matriz de Gram $\mathbf{G}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ y viceversa.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 16 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. 6%.

Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ son ortogonales calcule su matriz de Gram $\mathbf{G}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ y viceversa.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 11 \\ -7 \\ 18 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. 8%.

Construya una factorización QR de la matriz dada \mathbf{A} usando el **algoritmo de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{I}_3$, $\mathbf{Q}\mathbf{R} = \mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 20 \\ 2 & 0 & -8 \\ 2 & 4 & -5 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. 10 %.

Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x) \sqrt{1-x^2} dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{16}$	0	$\frac{5\pi}{128}$

donde $I_p := \int_{-1}^1 x^p \sqrt{1-x^2} dx.$

Ejercicio 14. 5 %.

I. En este ejercicio demostramos **el teorema de Pitágoras** y un poco más. Sea H un espacio vectorial real con producto interno y sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H$. Demuestre que

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2.$$

II. Construya en \mathbb{R}^3 dos vectores \mathbf{a}, \mathbf{b} con componentes enteras no nulas, de tal manera que \mathbf{a} y \mathbf{b} sean ortogonales. Calcule su producto interno. Calcule las normas $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|, \|\mathbf{a}\|, \|\mathbf{b}\|$ y la expresión $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2$.

III. Construya en \mathbb{R}^3 dos vectores \mathbf{a}, \mathbf{b} con componentes enteras no nulas, de tal manera que \mathbf{a} y \mathbf{b} no sean ortogonales. Calcule su producto interno. Calcule las normas $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|, \|\mathbf{a}\|, \|\mathbf{b}\|$ y la expresión $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2$.

Ejercicio 15. 5 %.

I. Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno. Demuestre que la norma inducida por el producto interno satisface la identidad de paralelogramo.

II. Demuestre que en el espacio $C([0, 1])$ no existe ningún producto interno que induzca la norma de este espacio.

Ejercicio 16. 5 %.

Están dados dos vectores en \mathbb{R}^2 :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Denotemos por \mathbf{m} al vector $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

I. Calcule \mathbf{m} de manera explícita, luego calcule $\|\mathbf{m}\|$.

II. Calcule $\|\mathbf{a}\|, \|\mathbf{b}\|, \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$. Calcule $\|\mathbf{m}\|$ usando el teorema de Apolonio.

Ejercicio 17. 5 %.

Criterio de igualdad en la desigualdad de Schwarz, demostración. Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno y sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H$. Supongamos que $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}_H$ y que

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|.$$

Pongamos

$$\lambda := \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle}{\|\mathbf{a}\|^2}, \quad \mathbf{u} := \lambda \mathbf{a}, \quad \mathbf{w} := \mathbf{b} - \mathbf{u}.$$

I. Demuestre que $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$. Demuestre que $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}$.

II. Usando la suposición (la “igualdad de Schwarz”) exprese λ y $\|\mathbf{u}\|$ en términos de $\|\mathbf{a}\|$ y $\|\mathbf{b}\|$.

III. Aplique el teorema de Pitágoras a los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b}$.

IV. Muestre que \mathbf{b} es un múltiplo de \mathbf{a} .

Ejercicio 18. 5 %.

Están dados dos vectores en \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \\ 15 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

I. Considere la matriz M formada por las columnas \mathbf{a} y \mathbf{b} . Usando operaciones elementales por renglones, reduzca la matriz M a una forma escalonada o pseudoescalonada. Determine el rango de M . Concluya si los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} son linealmente dependientes o no.

II. Verifique si se cumple la igualdad

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|.$$

Ejercicio 19. 5 %.

Están dados dos vectores en \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

I. Considere la matriz M formada por las columnas \mathbf{a} y \mathbf{b} . Usando operaciones elementales por renglones, reduzca la matriz M a una forma escalonada o pseudoescalonada. Determine el rango de M . Concluya si los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} son linealmente dependientes o no.

II. Verifique si se cumple la igualdad

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|.$$

Análisis Funcional, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.

Tarea. Variante 3.

Espacios con producto interno.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 5 %.

Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\|^2 &= 50, & \|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3\|^2 &= 77, & \|\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3\|^2 &= 27, \\ \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\|^2 &= 62, & \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3\|^2 &= 9, & \|\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3\|^2 &= 83. \end{aligned}$$

Ejercicio 2. 5 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -12 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Muestre que los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ son ortogonales a pares y calcule sus normas.

II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3.$$

III. Haga la comprobación de la igualdad $\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3$.

IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

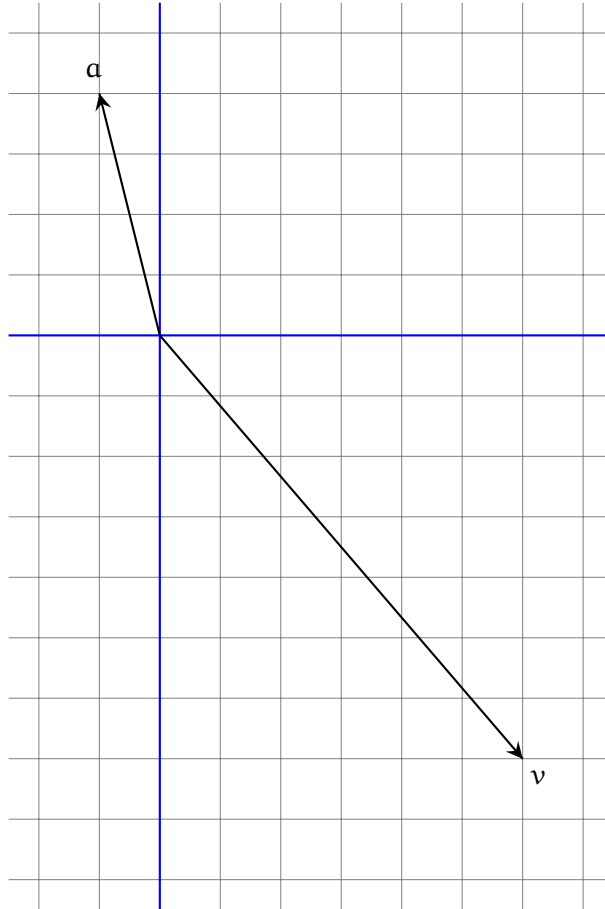
$$\|\mathbf{b}\|^2 = |\lambda_1|^2 \|\mathbf{a}_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|\mathbf{a}_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|\mathbf{a}_3\|^2.$$

Ejercicio 3. 5%.

En el plano cartesiano \mathbb{R}^2 están dados dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{v} .

I. Halle dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{u} \in \ell(\mathbf{a})$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

II. Muestre \mathbf{u} y \mathbf{w} en el dibujo y haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$.



Ejercicio 4. 5%.

En el espacio $V = \mathbb{R}^3$ con el producto interno usual consideramos dos vectores:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Muestre que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \neq 0$. Encuentre λ en \mathbb{R} tal que

$$\|\lambda \mathbf{a} + \mathbf{b}\| < \|\mathbf{b}\|.$$

Ejercicio 5. 5 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -12 \\ -2 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$ y calcule las normas $\|\mathbf{a}_1\|$ y $\|\mathbf{a}_2\|$.
- II. Halle dos vectores $\mathbf{u} \in S$ y $\mathbf{w} \in S^\perp$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, donde S es el subespacio generado por \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 .
- III. Haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_1$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_2$.

Ejercicio 6. 5 %.

Está dado un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** $P_{\mathbf{a}}$ y la **matriz de reflexión ortogonal** $H_{\mathbf{a}}$. Verifique que las matrices $P_{\mathbf{a}}$ y $H_{\mathbf{a}}$ son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad P_{\mathbf{a}}^2, \quad H_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad H_{\mathbf{a}}^2.$$

Ejercicio 7. 5 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -5 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_2$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 8. 5 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_3$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 9. 5%.

Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ algunos vectores del espacio \mathbb{R}^5 tales que

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{7}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 - 6\mathbf{b}_1}{8}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_3 - 9\mathbf{b}_1 + 4\mathbf{b}_2}{3}.$$

- I. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.
II. Encuentre una matriz \mathbf{R} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}$, donde \mathbf{A} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, y \mathbf{B} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

Ejercicio 10. 6%.

Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ son ortogonales calcule su matriz de Gram $\mathbf{G}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ y viceversa.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 13 \\ 11 \\ -12 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. 6%.

Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ son ortogonales calcule su matriz de Gram $\mathbf{G}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ y viceversa.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -21 \\ 6 \\ -3 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. 8%.

Construya una factorización QR de la matriz dada \mathbf{A} usando el **algoritmo de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{I}_3$, $\mathbf{Q}\mathbf{R} = \mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 16 \\ 4 & 2 & 10 \\ 5 & 7 & 30 \\ -2 & -6 & -19 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. 10 %.

Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) e^{-x^2} dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	$\sqrt{\pi}$	0	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	0	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	0	$\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$

donde $I_p := \int_{-\infty}^{\infty} x^p e^{-x^2} dx.$

Ejercicio 14. 5 %.

I. En este ejercicio demostramos **el teorema de Pitágoras** y un poco más. Sea H un espacio vectorial real con producto interno y sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H$. Demuestre que

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2.$$

II. Construya en \mathbb{R}^3 dos vectores \mathbf{a}, \mathbf{b} con componentes enteras no nulas, de tal manera que \mathbf{a} y \mathbf{b} sean ortogonales. Calcule su producto interno. Calcule las normas $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|, \|\mathbf{a}\|, \|\mathbf{b}\|$ y la expresión $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2$.

III. Construya en \mathbb{R}^3 dos vectores \mathbf{a}, \mathbf{b} con componentes enteras no nulas, de tal manera que \mathbf{a} y \mathbf{b} no sean ortogonales. Calcule su producto interno. Calcule las normas $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|, \|\mathbf{a}\|, \|\mathbf{b}\|$ y la expresión $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2$.

Ejercicio 15. 5 %.

I. Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno. Demuestre que la norma inducida por el producto interno satisface la identidad de paralelogramo.

II. Sea V el espacio vectorial de polinomios de grado ≤ 3 con coeficientes reales o complejos, con la siguiente norma:

$$\text{si } f(t) = \sum_{k=0}^3 a_k t^k, \quad \|f\| := \sum_{k=0}^3 \frac{|a_k|}{k!}.$$

Demuestre que en V no existe ningún producto interno que induzca esta norma.

Ejercicio 16. 5 %.

Están dados dos vectores en \mathbb{R}^2 :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Denotemos por \mathbf{m} al vector $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

I. Calcule \mathbf{m} de manera explícita, luego calcule $\|\mathbf{m}\|$.

II. Calcule $\|\mathbf{a}\|, \|\mathbf{b}\|, \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$. Calcule $\|\mathbf{m}\|$ usando el teorema de Apolonio.

Ejercicio 17. 5 %.

Criterio de igualdad en la desigualdad de Schwarz, demostración. Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno y sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H$. Supongamos que $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}_H$ y que

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|.$$

Pongamos

$$\lambda := \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle}{\|\mathbf{a}\|^2}, \quad \mathbf{u} := \lambda \mathbf{a}, \quad \mathbf{w} := \mathbf{b} - \mathbf{u}.$$

I. Demuestre que $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$. Demuestre que $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}$.

II. Usando la suposición (la “igualdad de Schwarz”) exprese λ y $\|\mathbf{u}\|$ en términos de $\|\mathbf{a}\|$ y $\|\mathbf{b}\|$.

III. Aplique el teorema de Pitágoras a los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b}$.

IV. Muestre que \mathbf{b} es un múltiplo de \mathbf{a} .

Ejercicio 18. 5 %.

Están dados dos vectores en \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 14 \\ 21 \\ -14 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

I. Considere la matriz M formada por las columnas \mathbf{a} y \mathbf{b} . Usando operaciones elementales por renglones, reduzca la matriz M a una forma escalonada o pseudoescalonada. Determine el rango de M . Concluya si los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} son linealmente dependientes o no.

II. Verifique si se cumple la igualdad

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|.$$

Ejercicio 19. 5 %.

Están dados dos vectores en \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

I. Considere la matriz M formada por las columnas \mathbf{a} y \mathbf{b} . Usando operaciones elementales por renglones, reduzca la matriz M a una forma escalonada o pseudoescalonada. Determine el rango de M . Concluya si los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} son linealmente dependientes o no.

II. Verifique si se cumple la igualdad

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|.$$

Análisis Funcional, Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas.

Tarea. Variante 4.

Espacios con producto interno.

Nombre:

Calificación (%):

Las tareas se califican de manera muy cruel. Es obligatorio escribir los cálculos en las comprobaciones.

Ejercicio 1. 5 %.

Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in V$. Calcule la matriz de Gram $G(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, si están dadas las siguientes normas:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\|^2 &= 17, & \|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3\|^2 &= 26, & \|\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3\|^2 &= 61, \\ \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\|^2 &= 85, & \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3\|^2 &= 34, & \|\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3\|^2 &= 13. \end{aligned}$$

Ejercicio 2. 5 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -11 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ son ortogonales a pares y calcule sus normas.
- II. Usando el producto interno encuentre coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que
$$\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3.$$
- III. Haga la comprobación de la igualdad $\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3$.
- IV. Haga la comprobación de la identidad de Pitágoras-Parseval:

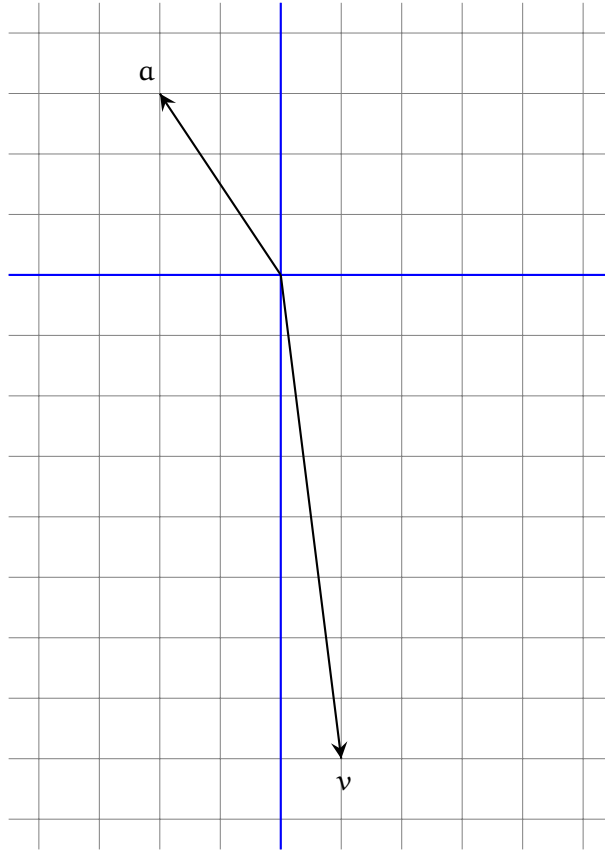
$$\|\mathbf{b}\|^2 = |\lambda_1|^2 \|\mathbf{a}_1\|^2 + |\lambda_2|^2 \|\mathbf{a}_2\|^2 + |\lambda_3|^2 \|\mathbf{a}_3\|^2.$$

Ejercicio 3. 5%.

En el plano cartesiano \mathbb{R}^2 están dados dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{v} .

I. Halle dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{u} \in \ell(\mathbf{a})$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

II. Muestre \mathbf{u} y \mathbf{w} en el dibujo y haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$.



Ejercicio 4. 5%.

En el espacio $V = \mathbb{R}^3$ con el producto interno usual consideramos dos vectores:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -9 \\ -17 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Muestre que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \neq 0$. Encuentre λ en \mathbb{R} tal que

$$\|\lambda \mathbf{a} + \mathbf{b}\| < \|\mathbf{b}\|.$$

Ejercicio 5. 5 %.

En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 consideramos los siguientes vectores:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ -10 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

- I. Muestre que $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$ y calcule las normas $\|\mathbf{a}_1\|$ y $\|\mathbf{a}_2\|$.
- II. Halle dos vectores $\mathbf{u} \in S$ y $\mathbf{w} \in S^\perp$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, donde S es el subespacio generado por \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 .
- III. Haga las comprobaciones: $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_1$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}_2$.

Ejercicio 6. 5 %.

Está dado un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Calcule la **matriz de proyección ortogonal** $P_{\mathbf{a}}$ y la **matriz de reflexión ortogonal** $H_{\mathbf{a}}$. Verifique que las matrices $P_{\mathbf{a}}$ y $H_{\mathbf{a}}$ son simétricas y calcule directamente las siguientes expresiones:

$$P_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad P_{\mathbf{a}}^2, \quad H_{\mathbf{a}}\mathbf{a}, \quad H_{\mathbf{a}}^2.$$

Ejercicio 7. 5 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 12 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_2$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 8. 5 %.

Está dado un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la **reflexión de Householder** que corresponde al vector \mathbf{v} . En otras palabras, calcule un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$, donde \mathbf{e}_1 es el primer vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Calcule la matriz $H_{\mathbf{a}}$. Compruebe que $H_{\mathbf{a}}^2 = I_3$ y $H_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{e}_1$.

Ejercicio 9. 5%.

Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ algunos vectores del espacio \mathbb{R}^5 tales que

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{7}, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{b}_1}{9}, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\mathbf{a}_3 - 6\mathbf{b}_1 + 8\mathbf{b}_2}{4}.$$

- I. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.
II. Encuentre una matriz \mathbf{R} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}$, donde \mathbf{A} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, y \mathbf{B} es la matriz formada de las columnas $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$.

Ejercicio 10. 6%.

Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ son ortogonales calcule su matriz de Gram $\mathbf{G}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ y viceversa.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ -4 \\ -18 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 11. 6%.

Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^4$. Concluya si los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ son linealmente independientes. Para comprobar que los vectores construidos $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ son ortogonales calcule su matriz de Gram $\mathbf{G}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$. Escriba cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ y viceversa.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 22 \\ -1 \\ 7 \\ -13 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 12. 8%.

Construya una factorización QR de la matriz dada \mathbf{A} usando el **algoritmo de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{I}_3$, $\mathbf{Q}\mathbf{R} = \mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -9 & 21 \\ 4 & -3 & 7 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 13. 10 %.

Aplique el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt a los polinomios $1, x, x^2, x^3$ en el espacio de los polinomios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{+\infty} f(x)g(x) e^{-x} dx.$$

Calcule la matriz de Gram de los polinomios b_0, b_1, b_2, b_3 obtenidos en este proceso. Para calcular las integrales puede usar la siguiente tabla:

p	0	1	2	3	4	5	6
I_p	1	1	2	6	24	120	720

donde $I_p := \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx.$

Ejercicio 14. 5 %.

I. En este ejercicio demostramos **el teorema de Pitágoras** y un poco más. Sea H un espacio vectorial real con producto interno y sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H$. Demuestre que

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2.$$

II. Construya en \mathbb{R}^3 dos vectores \mathbf{a}, \mathbf{b} con componentes enteras no nulas, de tal manera que \mathbf{a} y \mathbf{b} sean ortogonales. Calcule su producto interno. Calcule las normas $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|, \|\mathbf{a}\|, \|\mathbf{b}\|$ y la expresión $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2$.

III. Construya en \mathbb{R}^3 dos vectores \mathbf{a}, \mathbf{b} con componentes enteras no nulas, de tal manera que \mathbf{a} y \mathbf{b} no sean ortogonales. Calcule su producto interno. Calcule las normas $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|, \|\mathbf{a}\|, \|\mathbf{b}\|$ y la expresión $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2$.

Ejercicio 15. 5 %.

I. Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno. Demuestre que la norma inducida por el producto interno satisface la identidad de paralelogramo.

II. Sea V el espacio vectorial de polinomios de grado ≤ 3 con coeficientes reales o complejos, con la siguiente norma:

$$\|f\| := \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|.$$

Demuestre que en V no existe ningún producto interno que induzca esta norma.

Ejercicio 16. 5 %.

Están dados dos vectores en \mathbb{R}^2 :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Denotemos por \mathbf{m} al vector $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

I. Calcule \mathbf{m} de manera explícita, luego calcule $\|\mathbf{m}\|$.

II. Calcule $\|\mathbf{a}\|, \|\mathbf{b}\|, \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$. Calcule $\|\mathbf{m}\|$ usando el teorema de Apolonio.

Ejercicio 17. 5 %.

Criterio de igualdad en la desigualdad de Schwarz, demostración. Sea H un espacio vectorial complejo con producto interno y sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H$. Supongamos que $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}_H$ y que

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|.$$

Pongamos

$$\lambda := \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle}{\|\mathbf{a}\|^2}, \quad \mathbf{u} := \lambda \mathbf{a}, \quad \mathbf{w} := \mathbf{b} - \mathbf{u}.$$

I. Demuestre que $\mathbf{w} \perp \mathbf{a}$. Demuestre que $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}$.

II. Usando la suposición (la “igualdad de Schwarz”) exprese λ y $\|\mathbf{u}\|$ en términos de $\|\mathbf{a}\|$ y $\|\mathbf{b}\|$.

III. Aplique el teorema de Pitágoras a los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b}$.

IV. Muestre que \mathbf{b} es un múltiplo de \mathbf{a} .

Ejercicio 18. 5 %.

Están dados dos vectores en \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 15 \\ 25 \\ -10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -12 \\ -20 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

I. Considere la matriz M formada por las columnas \mathbf{a} y \mathbf{b} . Usando operaciones elementales por renglones, reduzca la matriz M a una forma escalonada o pseudoescalonada. Determine el rango de M . Concluya si los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} son linealmente dependientes o no.

II. Verifique si se cumple la igualdad

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|.$$

Ejercicio 19. 5 %.

Están dados dos vectores en \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

I. Considere la matriz M formada por las columnas \mathbf{a} y \mathbf{b} . Usando operaciones elementales por renglones, reduzca la matriz M a una forma escalonada o pseudoescalonada. Determine el rango de M . Concluya si los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} son linealmente dependientes o no.

II. Verifique si se cumple la igualdad

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|.$$