Análisis Matemático III.
Tarea “Conjuntos convexos y funciones convexas”.
Variante α.

Combinaciones convexas, envolturas convexas, conjuntos convexos, conjuntos convexos en espacios normados, diferencias divididas, funciones convexas.

Ejercicio 1. *5 %.*
Combinaciones afines de puntos en la recta real. Están dados dos puntos en la recta real:

$$a = -3, \qquad b = 5.$$

Definimos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) := (1-t)a + tb$. Representar cada uno de los siguientes puntos como $f(t)$ para algún t. Hacer un dibujo.

$$-4, \qquad -2, \qquad 0, \qquad 1, \qquad 3, \qquad 5, \qquad 7.$$

Ejercicio 2. *5 %.*
Combinaciones afines de puntos en el plano. Están dados dos puntos en $\mathbb{R}^2$:

$$a = (-3, 2), \qquad b = (2, -1).$$

Definimos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) := (1-t)a + tb$. Calcular $f(t)$ para cada uno de los siguientes valores de t. Hacer un dibujo.

$$t = -2, \quad t = -\frac{3}{2}, \quad t = 0, \quad t = \frac{1}{3}, \quad t = \frac{1}{2}, \quad t = \frac{2}{3}, \quad t = 1, \quad t = \frac{4}{3}, \quad t = 2.$$

Ejercicio 3. *5 %.*
Combinaciones convexas de combinaciones convexas son combinaciones convexas. Sea V un espacio vectorial real o complejo y sean $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q \in V$, $u \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_p)$, $v \in \operatorname{conv}(b_1, \ldots, b_q)$, $w \in \operatorname{conv}(u, v)$. Demostrar que $w \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q)$.

Ejercicio 4. *5 %.*
Envolturas convexas. Sea V un espacio vectorial real o complejo y sea $A \subseteq V$. Demostrar que $\operatorname{conv}_2(\operatorname{conv}(A)) \subseteq \operatorname{conv}(A)$. Sugerencia: usar el resultado del ejercicio anterior.

Ejercicio 5. *5 %.*
Cada bola en un espacio normado es un conjunto convexo. Sea V un espacio normado complejo y sean $a \in V$, $r > 0$. Demostrar que la bola $B(a, r)$ es un conjunto convexo.

Ejercicio 6. *5 %.*
Ejemplo de conjunto no convexo. Construir un ejemplo de conjunto no convexo. Hay que elegir un espacio vectorial real V y un conjunto $A \subseteq V$. Demostrar bien que A no es convexo.

Ejercicio 7. *5 %.*
La envoltura convexa de cualquier conjunto es un conjunto convexo. Sea V un espacio vectorial real o complejo y sea $A \subseteq V$. Demostrar que $\operatorname{conv}(A)$ es un conjunto convexo. Sugerencia: utilizar propiedades de envolturas convexas.

Ejercicio 8. *5 %.*
La envoltura convexa de la suma de dos conjuntos. Sea V un espacio vectorial real o complejo y sean $P, Q \subseteq V$. Demostrar o refutar (con un ejemplo) la siguiente propiedad:

$$\operatorname{conv}(P + Q) = \operatorname{conv}(P) + \operatorname{conv}(Q).$$

Ejercicio 9. *15 %.*
La cerradura del conjunto convexo es un conjunto convexo. Sea V un espacio normado complejo y sea $A \subseteq V$. Supongamos que A es convexo. Demostrar que $\operatorname{cl}(A)$ es convexo.

Ejercicio 10. *5 %.*
El sentido gráfico de la definición de función estrictamente convexa. Elijir un intervalo $A \subseteq \mathbb{R}$, una función estrictamente convexa $f\colon A \to \mathbb{R}$, un par de puntos $a, b \in A$ tales que $a < b$, y un número real λ tal que $0 < \lambda < 1$. Hay que escribir de manera explícita la fórmula para f y los números

$$a, \quad b, \quad \lambda, \quad (1-\lambda)a + \lambda b, \quad f(a), \quad f(b), \quad (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b), \quad f((1-\lambda)a + \lambda b).$$

En un dibujo mostrar la gráfica de f y los siguientes 5 puntos:

$$\big(a, f(a)\big), \qquad \big(b, f(b)\big), \qquad \Big((1-\lambda)a + \lambda b, 0\Big),$$

$$\Big((1-\lambda)a + \lambda b, (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)\Big), \qquad \Big((1-\lambda)a + \lambda b, f((1-\lambda)a + \lambda b)\Big).$$

Además, dibujar el segmento que conecta los primeros dos puntos y un segmento que contenga los últimos tres puntos. Hay que elegir los datos de tal manera que estos 5 puntos sean fáciles de distinguir en el dibujo. Escribir las fórmulas en el dibujo con el mismo estilo que se usa en otras fórmulas matemáticas (se recomienda usar TikZ, pero se admiten otros métodos).

Ejercicio 11. *10 %.*
Ejemplo de función no convexa. Construir una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que no sea convexa. Demostrar bien que f no es convexa.

Ejercicio 12. *10 %.*
Funciones convexas en la recta real y diferencias divididas. Sea A un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa;

(b) para cualesquiera a, b, c en A con $a < b < c$, $\quad \Delta_f(a, b) \leqslant \Delta_f(a, c)$.

Ejercicio 13. *10 %.*
Convexidad de la función exponencial y la desigualdad de Young.

A. Recuerde la definición de $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ en términos de series. Calcule $\exp'$ y $\exp''$.

B. Consideramos $\exp_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R} \to]0, +\infty[$. Demuestre que $\exp_{\mathbb{R}}(x) > 0$ para cada x en $\mathbb{R}$. Demuestre que $\exp_{\mathbb{R}}$ es estrictamente convexa usando la segunda derivada.

C. Usando B demuestre la desigualdad de Young y encuentre el criterio de igualdad en la desigualdad de Young.

Ejercicio 14. *10 %.*
Aplicación del teorema sobre la recta básica. Demuestre que para cada x en $\mathbb{R}$,

$$e^x \leqslant 1 + x.$$

Análisis Matemático III.
Tarea “Conjuntos convexos y funciones convexas”.
Variante 0.

Combinaciones convexas, envolturas convexas, conjuntos convexos, conjuntos convexos en espacios normados, diferencias divididas, funciones convexas.

Ejercicio 1. *5 %.*
Combinaciones afines de puntos en la recta real. Están dados dos puntos en la recta real:

$$a = -2, \qquad b = 4.$$

Definimos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) := (1-t)a + tb$. Representar cada uno de los siguientes puntos como $f(t)$ para algún t. Hacer un dibujo.

$$-4, \qquad -2, \qquad 0, \qquad 1, \qquad 3, \qquad 5, \qquad 7.$$

Ejercicio 2. *5 %.*
Combinaciones afines de puntos en el plano. Están dados dos puntos en $\mathbb{R}^2$:

$$a = (-3,-3), \qquad b = (4,1).$$

Definimos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) := (1-t)a + tb$. Calcular $f(t)$ para cada uno de los siguientes valores de t. Hacer un dibujo.

$$t = -2, \quad t = -\frac{1}{2}, \quad t = 0, \quad t = \frac{1}{3}, \quad t = \frac{1}{2}, \quad t = \frac{3}{4}, \quad t = 1, \quad t = \frac{4}{3}, \quad t = 2.$$

Ejercicio 3. *5 %.*
Expresión recursiva para las combinaciones convexas. Sea V un espacio vectorial real o complejo, sea $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ y sea $v \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m)$. Construir u en $\operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_{m-1})$ tal que $v \in \operatorname{conv}(u, a_m)$.

Ejercicio 4. *5 %.*
Envolturas convexas. Sea V un espacio vectorial real o complejo y sea $A \subseteq V$. Supongamos que $\operatorname{conv}_2(A) \subseteq A$. Demostrar que $\operatorname{conv}_m(A) \subseteq A$ para cada m en $\mathbb{N}$. Sugerencia: usar el resultado del ejercicio anterior.

Ejercicio 5. *5 %.*
Cada semiespacio real es un conjunto convexo. Sea V un espacio normado complejo, sea $\varphi\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal continuo y sea $c \in \mathbb{R}$. Pongamos

$$A := \Big\{ x \in V\colon \ \operatorname{Re}(\varphi(x)) \leqslant c \Big\}.$$

Demostrar que el conjunto A es convexo.

Ejercicio 6. *5 %.*
Ejemplo de conjunto no convexo. Construir un ejemplo de conjunto no convexo. Hay que elegir un espacio vectorial real V y un conjunto $A \subseteq V$. Demostrar bien que A no es convexo.

Ejercicio 7. *5 %.*
La envoltura convexa de un conjunto convexo. Sea V un espacio vectorial real o complejo y sea $A \subseteq V$ un conjunto convexo. Demostrar que $\operatorname{conv}(A) = A$. Sugerencia: utilizar propiedades más simples de envolturas convexas.

Ejercicio 8. *5 %.*
La suma de dos conjuntos convexos. Sea V un espacio vectorial real o complejo y sean $P, Q \subseteq V$ dos conjuntos convexos. Demostrar que $P + Q$ es convexo.

Ejercicio 9. *15 %.*
El interior del conjunto convexo es un conjunto convexo. Sea V un espacio normado complejo y sea $A \subseteq V$. Supongamos que A es convexo. Demostrar que $\operatorname{int}(A)$ es convexo. Si esta afirmación no es correcta, construir un contraejemplo.

Ejercicio 10. *5 %.*
El sentido gráfico de la definición de función estrictamente convexa. Elijir un intervalo $A \subseteq \mathbb{R}$, una función estrictamente convexa $f\colon A \to \mathbb{R}$, un par de puntos $a, b \in A$ tales que $a < b$, y un número real λ tal que $0 < \lambda < 1$. Hay que escribir de manera explícita la fórmula para f y los números

$$a, \quad b, \quad \lambda, \quad (1-\lambda)a + \lambda b, \quad f(a), \quad f(b), \quad (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b), \quad f((1-\lambda)a + \lambda b).$$

En un dibujo mostrar la gráfica de f y los siguientes 5 puntos:

$$\big(a, f(a)\big), \qquad \big(b, f(b)\big), \qquad \Big((1-\lambda)a + \lambda b, 0\Big),$$

$$\Big((1-\lambda)a + \lambda b, (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)\Big), \qquad \Big((1-\lambda)a + \lambda b, f((1-\lambda)a + \lambda b)\Big).$$

Además, dibujar el segmento que conecta los primeros dos puntos y un segmento que contenga los últimos tres puntos. Hay que elegir los datos de tal manera que estos 5 puntos sean fáciles de distinguir en el dibujo. Escribir las fórmulas en el dibujo con el mismo estilo que se usa en otras fórmulas matemáticas (se recomienda usar TikZ, pero se admiten otros métodos).

Ejercicio 11. *10 %.*
Ejemplo de función no convexa. Construir una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que no sea convexa. Demostrar bien que f no es convexa.

Ejercicio 12. *10 %.*
Funciones convexas en la recta real y diferencias divididas. Sea A un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa;

(b) para cualesquiera a, b, c en A con $a < b < c$, $\quad \Delta_f(a, b) \leqslant \Delta_f(a, c)$.

Ejercicio 13. *10 %.*
Concavidad de la función logarítmica y la desigualdad de Young.

A. Sea $\exp_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R} \to]0, +\infty[$, $\exp_{\mathbb{R}}(x) := \exp(x)$. Definimos $\log\colon\ ]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ como la función inversa de $\exp_{\mathbb{R}}$. Calcule $\log'$ y $\log''$.

B. Demuestre que log es estrictamente cóncava usando la segunda derivada.

C. Usando B demuestre la desigualdad de Young y encuentre el criterio de igualdad en la desigualdad de Young.

Ejercicio 14. *10 %.*
Aplicación del teorema sobre la recta básica. Demuestre que para cada $x > 0$,

$$\log(x) \leqslant x - 1.$$

Análisis Matemático III.
Tarea "Conjuntos convexos y funciones convexas".
Variante 1.

Combinaciones convexas, envolturas convexas, conjuntos convexos, conjuntos convexos en espacios normados, diferencias divididas, funciones convexas.

Ejercicio 1. *5 %.*
Combinaciones afines de puntos en la recta real. Están dados dos puntos en la recta real:

$$a = 1, \qquad b = 6.$$

Definimos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) := (1-t)a + tb$. Representar cada uno de los siguientes puntos como $f(t)$ para algún t. Hacer un dibujo.

$$-3, \qquad -2, \qquad 0, \qquad 1, \qquad 3, \qquad 4, \qquad 7.$$

Ejercicio 2. *5 %.*
Combinaciones afines de puntos en el plano. Están dados dos puntos en $\mathbb{R}^2$:

$$a = (-2, 3), \qquad b = (1, -1).$$

Definimos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) := (1-t)a + tb$. Calcular $f(t)$ para cada uno de los siguientes valores de t. Hacer un dibujo.

$$t = -1, \quad t = -\frac{2}{3}, \quad t = 0, \quad t = \frac{1}{4}, \quad t = \frac{1}{2}, \quad t = \frac{2}{3}, \quad t = 1, \quad t = \frac{3}{2}, \quad t = 2.$$

Ejercicio 3. *5 %.*
La envoltura convexa de una lista de vectores incluye a los vectores originales. Sea V un espacio vectorial real o complejo, sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ y sea $p \in \{1, \ldots, m\}$. Demostrar que $a_p \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m)$.

Ejercicio 4. *5 %.*
Envolturas convexas. Sea V un espacio vectorial real o complejo y sea $A \subseteq V$. Demostrar que $A = \operatorname{conv}_1(A)$ y $\operatorname{conv}_1(A) \subseteq \operatorname{conv}(A)$.

Ejercicio 5. *5 %.*
La suma de dos conjuntos convexos es convexa. Sea V un espacio normado complejo y sean $P, Q \subseteq V$ conjuntos convexos. Demostrar que $P + Q$ es convexo.

Ejercicio 6. *5 %.*
Ejemplo de conjunto no convexo. Construir un ejemplo de conjunto no convexo. Hay que elegir un espacio vectorial real V y un conjunto $A \subseteq V$. Demostrar bien que A no es convexo.

Ejercicio 7. *5 %.*
La envoltura convexa de cualquier conjunto es un conjunto convexo. Sea V un espacio vectorial real o complejo y sea $A \subseteq V$. Demostrar que $\operatorname{conv}(A)$ es un conjunto convexo. Sugerencia: utilizar propiedades de envolturas convexas.

Ejercicio 8. *5 %.*
La envoltura convexa del producto de un conjunto por un escalar. Sea V un espacio vectorial real o complejo, sea $A \subseteq V$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Demostrar que

$$\operatorname{conv}(\lambda A) = \lambda \operatorname{conv}(A).$$

Sugerencia: separar los casos triviales, cuando $A = \varnothing$ o $\lambda = 0$.

Ejercicio 9. *15 %.*
La envoltura convexa del conjunto cerrado no necesariamente es cerrada. Encontrar un espacio normado V y un conjunto $A \subseteq V$ cerrado tales que su envoltura convexa $\operatorname{conv}(A)$ no sea cerrada.

Ejercicio 10. *5 %.*
El sentido gráfico de la definición de función estrictamente convexa. Elijir un intervalo $A \subseteq \mathbb{R}$, una función estrictamente convexa $f\colon A \to \mathbb{R}$, un par de puntos $a, b \in A$ tales que $a < b$, y un número real λ tal que $0 < \lambda < 1$. Hay que escribir de manera explícita la fórmula para f y los números

$$a, \quad b, \quad \lambda, \quad (1-\lambda)a + \lambda b, \quad f(a), \quad f(b), \quad (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b), \quad f((1-\lambda)a + \lambda b).$$

En un dibujo mostrar la gráfica de f y los siguientes 5 puntos:

$$\big(a, f(a)\big), \qquad \big(b, f(b)\big), \qquad \Big((1-\lambda)a + \lambda b, 0\Big),$$

$$\Big((1-\lambda)a + \lambda b, (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)\Big), \qquad \Big((1-\lambda)a + \lambda b, f((1-\lambda)a + \lambda b)\Big).$$

Además, dibujar el segmento que conecta los primeros dos puntos y un segmento que contenga los últimos tres puntos. Hay que elegir los datos de tal manera que estos 5 puntos sean fáciles de distinguir en el dibujo. Escribir las fórmulas en el dibujo con el mismo estilo que se usa en otras fórmulas matemáticas (se recomienda usar TikZ, pero se admiten otros métodos).

Ejercicio 11. *10 %.*
Ejemplo de función no convexa. Construir una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que no sea convexa. Demostrar bien que f no es convexa.

Ejercicio 12. *10 %.*
Funciones convexas en la recta real y diferencias divididas. Sea A un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa;

(b) para cualesquiera a, b, c en A con $a < b < c$, $\quad \Delta_f(a, c) \leqslant \Delta_f(b, c)$.

Ejercicio 13. *10 %.*
Desigualdad generalizada entre media geométrica y medida aritmética.

A. Recuerde la definición de $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ en términos de series. Calcule $\exp'$ y $\exp''$.

B. Consideramos $\exp_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R} \to]0, +\infty[$. Demuestre que $\exp_{\mathbb{R}}(x) > 0$ para cada x en $\mathbb{R}$. Demuestre que $\exp_{\mathbb{R}}$ es estrictamente convexa usando la segunda derivada.

C. Sea $n \in \mathbb{N}$, sean $\xi_1, \ldots, \xi_n > 0$ tales que $\sum_{k=1}^{n} \xi_k = 1$, y sean $a_1, \ldots, a_n > 0$. Demuestre que

$$\prod_{k=1}^{n} a_k^{\xi_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \xi_k a_k.$$

Ejercicio 14. *10 %.*
Demostración de la desigualdad de Bernoulli usando el teorema sobre la recta básica.

A. Sea $p \in \mathbb{R}$. Definimos $g\colon\ ]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $g(t) := t^p$. Demuestre que alguna manera la fórmula para $g'(t)$.

B. Sea $p > 1$. Definimos $f\colon\ ]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) := (1+x)^p$. Demuestre que f es estrictamente convexa.

C. Sea $p > 1$. Demuestre que para cada $x > -1$,

$$(1 + x)^p \geqslant 1 + px.$$

Análisis Matemático III.
Tarea "Conjuntos convexos y funciones convexas".
Variante 2.

Combinaciones convexas, envolturas convexas, conjuntos convexos, conjuntos convexos en espacios normados, diferencias divididas, funciones convexas.

Ejercicio 1. *5 %.*
Combinaciones afines de puntos en la recta real. Están dados dos puntos en la recta real:

$$a = -5, \qquad b = 3.$$

Definimos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) := (1-t)a + tb$. Representar cada uno de los siguientes puntos como $f(t)$ para algún t. Hacer un dibujo.

$$-7, \qquad -4, \qquad 1, \qquad 2, \qquad 3, \qquad 5, \qquad 6.$$

Ejercicio 2. *5 %.*
Combinaciones afines de puntos en el plano. Están dados dos puntos en $\mathbb{R}^2$:

$$a = (-1, -4), \qquad b = (3, -1).$$

Definimos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) := (1-t)a + tb$. Calcular $f(t)$ para cada uno de los siguientes valores de t. Hacer un dibujo.

$$t = -1, \quad t = -\frac{2}{3}, \quad t = 0, \quad t = \frac{1}{4}, \quad t = \frac{1}{2}, \quad t = \frac{2}{3}, \quad t = 1, \quad t = \frac{3}{2}, \quad t = 2.$$

Ejercicio 3. *5 %.*
La intersección de las medianas de un triángulo en términos de combinaciones convexas. Sea V un espacio vectorial real y sean $a_1, a_2, a_3 \in V$. Denotemos por L_1 el lado del triángulo opuesto al vértice a_1, esto es, $L_1 := \operatorname{conv}(a_2, a_3)$. Sea b_1 el centro del segmento L_1, esto es, el punto medio entre a_2 y a_3. Sea M_1 la mediana que conecta los puntos a_1 y b_1, esto es, $M_1 := \operatorname{conv}(a_1, b_1)$. De manera similar definimos L_2, b_2, M_2, L_3, b_3, M_3. Demostrar de manera algebraica que

$$M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \{c\}, \qquad \text{donde} \qquad c := \frac{1}{3}\Big(a_1 + a_2 + a_3\Big).$$

Ejercicio 4. *5 %.*
Envolturas convexas. Sea V un espacio vectorial real o complejo y sea $A \subseteq V$. Demostrar que $\operatorname{conv}_m(A) \subseteq \operatorname{conv}_{m+1}(A)$ para cada m en $\mathbb{N}$.

Ejercicio 5. *5 %.*
El epigrafo de cada función convexa es un conjunto convexo. Sea V un espacio vectorial real o complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{R}$ una función convexa. Denotemos por E el epigrafo de f:

$$E := \Big\{(x, \alpha) \in V \times \mathbb{R}: \quad \alpha \geqslant f(x)\Big\}.$$

Demostrar que E es un subconjunto convexo del espacio vectorial $V \times \mathbb{R}$.

Ejercicio 6. *5 %.*
Ejemplo de conjunto no convexo. Construir un ejemplo de conjunto no convexo. Hay que elegir un espacio vectorial real V y un conjunto $A \subseteq V$. Demostrar bien que A no es convexo.

Ejercicio 7. *5 %.*
Criterio de convexidad de un conjunto en términos de su envoltura convexa. Sea V un espacio vectorial real o complejo y sea $A \subseteq V$. Demostrar que

$$A \text{ es convexo} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{conv}(A) = A.$$

Sugerencia: utilizar propiedades más simples.

Ejercicio 8. *5 %.*
La envoltura convexa de la suma de dos conjuntos. Sea V un espacio vectorial real o complejo y sean $P, Q \subseteq V$. Demostrar o refutar (con un ejemplo) la siguiente propiedad:

$$\operatorname{conv}(P + Q) = \operatorname{conv}(P) + \operatorname{conv}(Q).$$

Ejercicio 9. *15 %.*
La envoltura convexa del conjunto abierto es abierta. Sea V un espacio normado complejo y sea $A \subseteq V$ tal que A es abierto. Demostrar que el conjunto $\operatorname{conv}(A)$ es abierto.

Ejercicio 10. *5 %.*
El sentido gráfico de la definición de función estrictamente convexa. Elijir un intervalo $A \subseteq \mathbb{R}$, una función estrictamente convexa $f \colon A \to \mathbb{R}$, un par de puntos $a, b \in A$ tales que $a < b$, y un número real λ tal que $0 < \lambda < 1$. Hay que escribir de manera explícita la fórmula para f y los números

$$a, \quad b, \quad \lambda, \quad (1-\lambda)a + \lambda b, \quad f(a), \quad f(b), \quad (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b), \quad f((1-\lambda)a + \lambda b).$$

En un dibujo mostrar la gráfica de f y los siguientes 5 puntos:

$$\big(a, f(a)\big), \qquad \big(b, f(b)\big), \qquad \Big((1-\lambda)a + \lambda b, 0\Big),$$

$$\Big((1-\lambda)a + \lambda b, (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)\Big), \qquad \Big((1-\lambda)a + \lambda b, f((1-\lambda)a + \lambda b)\Big).$$

Además, dibujar el segmento que conecta los primeros dos puntos y un segmento que contenga los últimos tres puntos. Hay que elegir los datos de tal manera que estos 5 puntos sean fáciles de distinguir en el dibujo. Escribir las fórmulas en el dibujo con el mismo estilo que se usa en otras fórmulas matemáticas (se recomienda usar TikZ, pero se admiten otros métodos).

Ejercicio 11. *10 %.*
Ejemplo de función no convexa. Construir una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que no sea convexa. Demostrar bien que f no es convexa.

Ejercicio 12. *10 %.*
Funciones convexas en la recta real y diferencias divididas. Sea A un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa;

(b) para cualesquiera a, b, c en A con $a < b < c$, $\quad \Delta_f(a, b) \leqslant \Delta_f(b, c)$.

Ejercicio 13. *10 %.*
Comparación de la función seno con una función lineal.

A. Recuerde la definición de sen en términos de exp. Calcule sen' y sen''.

B. Recuerde alguna definición analítica del número π. Demuestre que $\operatorname{sen}(x) > 0$ para cada x en $]0, \pi[$.

C. Consideramos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \operatorname{sen}(x)$. Demuestre que sen es estrictamente cóncava en $]0, \pi[$.

D. Usando el resultado de C demuestre que para cada x en $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\operatorname{sen}(x) > \frac{2x}{\pi}.$$

Ejercicio 14. *10 %.*
Aplicación del teorema sobre la recta básica. Usando la convexidad de la función $-\sin$ en $[0, \pi]$, demuestre que para cada x en $[0, \pi]$,

$$\sin(x) \leqslant x.$$

Análisis Matemático III.
Tarea "Conjuntos convexos y funciones convexas".
Variante 3.

Combinaciones convexas, envolturas convexas, conjuntos convexos, conjuntos convexos en espacios normados, diferencias divididas, funciones convexas.

Ejercicio 1. *5 %.*
Combinaciones afines de puntos en la recta real. Están dados dos puntos en la recta real:

$$a = -4, \qquad b = 1.$$

Definimos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) := (1-t)a + tb$. Representar cada uno de los siguientes puntos como $f(t)$ para algún t. Hacer un dibujo.

$$-6, \qquad -3, \qquad -1, \qquad 0, \qquad 1, \qquad 3, \qquad 4.$$

Ejercicio 2. *5 %.*
Combinaciones afines de puntos en el plano. Están dados dos puntos en $\mathbb{R}^2$:

$$a = (-4, -1), \qquad b = (2, 3).$$

Definimos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) := (1-t)a + tb$. Calcular $f(t)$ para cada uno de los siguientes valores de t. Hacer un dibujo.

$$t = -1, \quad t = -\frac{1}{3}, \quad t = 0, \quad t = \frac{1}{3}, \quad t = \frac{1}{2}, \quad t = \frac{3}{4}, \quad t = 1, \quad t = \frac{5}{3}, \quad t = 2.$$

Ejercicio 3. *5 %.*
Las combinaciones convexas de combinaciones convexas son combinaciones convexas, ejemplo. Sea V un espacio vectorial real o complejo y sean $a_1, \ldots, a_7 \in V$. Supongamos que $s \in \operatorname{conv}(a_1, a_2, a_3, a_4)$, $t \in \operatorname{conv}(a_5, a_6, a_7)$ y $r \in \operatorname{conv}(s, t)$. Mostrar que $r \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_7)$.

Ejercicio 4. *5 %.*
Envolturas convexas. Sea V un espacio vectorial real o complejo y sea $A \subseteq V$. Sean $p, q \in \mathbb{N}$, $u \in \operatorname{conv}_p(A)$, $v \in \operatorname{conv}_q(A)$, $w \in \operatorname{conv}(u, v)$. Demostrar que $w \in \operatorname{conv}_{p+q}(A)$.

Ejercicio 5. *5 %.*
El cubo de Hilbert es convexo. En el espacio ℓ^2 consideremos el conjunto

$$A := \left\{ a \in \ell^2 : \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant a_k \leqslant \frac{1}{k} \right\}.$$

Este conjunto se conoce como el "cubo de Hilbert" o el "ladrillo de Hilbert". Demostrar que A es convexo.

Ejercicio 6. *5 %.*
Ejemplo de conjunto no convexo. Construir un ejemplo de conjunto no convexo. Hay que elegir un espacio vectorial real V y un conjunto $A \subseteq V$. Demostrar bien que A no es convexo.

Ejercicio 7. *5 %.*
La envoltura convexa de la envoltura convexa. Sea V un espacio vectorial real o complejo y sea $A \subseteq V$. Demostrar que

$$\operatorname{conv}(\operatorname{conv}(A)) = \operatorname{conv}(A).$$

Sugerencia: utilizar propiedades más simples.

Ejercicio 8. *5 %.*
La diferencia algebraica de dos conjuntos convexos. Sea V un espacio vectorial real o complejo y sean $P, Q \subseteq V$ dos conjuntos convexos. Demostrar que $P - Q$ es convexo.

Ejercicio 9. *15 %.*
La envoltura convexa del conjunto acotado es un conjunto acotado. Sea V un espacio normado complejo y sea A un subconjunto acotado de V. Demostrar que $\operatorname{conv}(A)$ también es acotado.

Ejercicio 10. *5 %.*
El sentido gráfico de la definición de función estrictamente convexa. Elijir un intervalo $A \subseteq \mathbb{R}$, una función estrictamente convexa $f\colon A \to \mathbb{R}$, un par de puntos $a, b \in A$ tales que $a < b$, y un número real λ tal que $0 < \lambda < 1$. Hay que escribir de manera explícita la fórmula para f y los números

$$a, \quad b, \quad \lambda, \quad (1-\lambda)a + \lambda b, \quad f(a), \quad f(b), \quad (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b), \quad f((1-\lambda)a + \lambda b).$$

En un dibujo mostrar la gráfica de f y los siguientes 5 puntos:

$$\big(a, f(a)\big), \qquad \big(b, f(b)\big), \qquad \Big((1-\lambda)a + \lambda b, 0\Big),$$

$$\Big((1-\lambda)a + \lambda b, (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)\Big), \qquad \Big((1-\lambda)a + \lambda b, f((1-\lambda)a + \lambda b)\Big).$$

Además, dibujar el segmento que conecta los primeros dos puntos y un segmento que contenga los últimos tres puntos. Hay que elegir los datos de tal manera que estos 5 puntos sean fáciles de distinguir en el dibujo. Escribir las fórmulas en el dibujo con el mismo estilo que se usa en otras fórmulas matemáticas (se recomienda usar TikZ, pero se admiten otros métodos).

Ejercicio 11. *10 %.*
Ejemplo de función no convexa. Construir una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que no sea convexa. Demostrar bien que f no es convexa.

Ejercicio 12. *10 %.*
Funciones convexas en la recta real y diferencias divididas. Sea A un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa;

(b) para cualesquiera a, b, c en A con $a < b < c$, $\quad \Delta_f(a, b) \leqslant \Delta_f(a, c)$.

Ejercicio 13. *10 %.*
Las funciones cóncavas crecientes son subaditivas. Sea $f\colon [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ tal que f es cóncava, creciente y $f(0) = 0$. Demuestre que para cada a, b en $[0, +\infty[$,

$$f(a + b) \leqslant f(a) + f(b).$$

Ejercicio 14. *10 %.*
Demostración de la desigualdad de Bernoulli usando el teorema sobre la recta básica.
A. Sea $p \in \mathbb{R}$. Definimos $g\colon\ ]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $g(t) := t^p$. Demuestre que alguna manera la fórmula para $g'(t)$.

B. Sea $p > 1$. Definimos $f\colon\ ]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) := (1 + x)^p$. Demuestre que f es estrictamente convexa.

C. Sea $p > 1$. Demuestre que para cada $x > -1$,

$$(1 + x)^p \geqslant 1 + px.$$

Análisis Matemático III.
Tarea “Conjuntos convexos y funciones convexas”.
Variante 4.

Combinaciones convexas, envolturas convexas, conjuntos convexos, conjuntos convexos en espacios normados, diferencias divididas, funciones convexas.

Ejercicio 1. *5 %.*
Combinaciones afines de puntos en la recta real. Están dados dos puntos en la recta real:

$$a = -3, \qquad b = 3.$$

Definimos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) := (1-t)a + tb$. Representar cada uno de los siguientes puntos como $f(t)$ para algún t. Hacer un dibujo.

$$-5, \qquad -4, \qquad -1, \qquad 2, \qquad 3, \qquad 4, \qquad 7.$$

Ejercicio 2. *5 %.*
Combinaciones afines de puntos en el plano. Están dados dos puntos en $\mathbb{R}^2$:

$$a = (-3, 1), \qquad b = (2, -1).$$

Definimos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) := (1-t)a + tb$. Calcular $f(t)$ para cada uno de los siguientes valores de t. Hacer un dibujo.

$$t = -2, \quad t = -\frac{2}{3}, \quad t = 0, \quad t = \frac{1}{4}, \quad t = \frac{1}{2}, \quad t = \frac{2}{3}, \quad t = 1, \quad t = \frac{3}{2}, \quad t = 2.$$

Ejercicio 3. *5 %.*
Las combinaciones convexas de cuatro vectores en términos de combinaciones convexas de tres vectores. Sea V un espacio vectorial real o complejo y sean $a_1, a_2, a_3, a_4 \in V$. Supongamos que $v \in \operatorname{conv}(a_1, a_2, a_3, a_4)$. Construir u en $\operatorname{conv}(a_1, a_2, a_3)$ tal que $v \in \operatorname{conv}(u, a_4)$.

Ejercicio 4. *5 %.*
Envolturas convexas. Sea V un espacio vectorial real o complejo y sea $A \subseteq V$. Supongamos que $\operatorname{conv}_2(A) \subseteq A$. Demostrar que $\operatorname{conv}_m(A) \subseteq A$ para cada m en $\mathbb{N}$. Sugerencia: usar la idea del ejercicio anterior.

Ejercicio 5. *5 %.*
Conjunto convexo definido como la preimagen de un rayo izquierdo respecto una función convexa. Sea V un espacio vectorial real, sea $f\colon V \to \mathbb{R}$ una función convexa y sea $c \in \mathbb{R}$. Demostrar que el siguiente conjunto es convexo:

$$A := \Big\{ x \in V\colon\ f(x) \leqslant c \Big\}.$$

Ejercicio 6. *5 %.*
Ejemplo de conjunto no convexo. Construir un ejemplo de conjunto no convexo. Hay que elegir un espacio vectorial real V y un conjunto $A \subseteq V$. Demostrar bien que A no es convexo.

Ejercicio 7. *5 %.*
Criterio de convexidad de un conjunto en términos de su envoltura convexa. Sea V un espacio vectorial real o complejo y sea $A \subseteq V$. Demostrar que

$$A \text{ es convexo} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{conv}(A) = A.$$

Sugerencia: utilizar propiedades más simples.

Ejercicio 8. *5 %.*
El producto de un conjunto convexo por un escalar. Sea V un espacio vectorial real o complejo, sea $A \subseteq V$ un conjunto convexo y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Demostrar que λA es convexo. Sugerencia: separar los casos triviales, cuando $A = \varnothing$ o $\lambda = 0$.

Ejercicio 9. *15 %.*
La envoltura convexa del conjunto compacto es compacta. Sea V un espacio de Banach complejo y sea A un subconjunto compacto de V. Demostrar que $\operatorname{conv}(A)$ también es compacto.

Ejercicio 10. *5 %.*
El sentido gráfico de la definición de función estrictamente convexa. Elijir un intervalo $A \subseteq \mathbb{R}$, una función estrictamente convexa $f\colon A \to \mathbb{R}$, un par de puntos $a, b \in A$ tales que $a < b$, y un número real λ tal que $0 < \lambda < 1$. Hay que escribir de manera explícita la fórmula para f y los números

$$a, \quad b, \quad \lambda, \quad (1-\lambda)a + \lambda b, \quad f(a), \quad f(b), \quad (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b), \quad f((1-\lambda)a + \lambda b).$$

En un dibujo mostrar la gráfica de f y los siguientes 5 puntos:

$$\big(a, f(a)\big), \qquad \big(b, f(b)\big), \qquad \Big((1-\lambda)a + \lambda b, 0\Big),$$

$$\Big((1-\lambda)a + \lambda b, (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)\Big), \qquad \Big((1-\lambda)a + \lambda b, f((1-\lambda)a + \lambda b)\Big).$$

Además, dibujar el segmento que conecta los primeros dos puntos y un segmento que contenga los últimos tres puntos. Hay que elegir los datos de tal manera que estos 5 puntos sean fáciles de distinguir en el dibujo. Escribir las fórmulas en el dibujo con el mismo estilo que se usa en otras fórmulas matemáticas (se recomienda usar TikZ, pero se admiten otros métodos).

Ejercicio 11. *10 %.*
Ejemplo de función no convexa. Construir una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que no sea convexa. Demostrar bien que f no es convexa.

Ejercicio 12. *10 %.*
Funciones convexas en la recta real y diferencias divididas. Sea A un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa;

(b) para cualesquiera a, b, c en A con $a < b < c$, $\quad \Delta_f(a, c) \leqslant \Delta_f(b, c)$.

Ejercicio 13. *10 %.*
Una desigualdad simple para la potencia de la suma.

A. Sea $p \in \mathbb{R}$. Definimos $g\colon\ [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $g(t) := t^p$. Demuestre que alguna manera la fórmula para $g'(t)$, para $t > 0$.

B. Sea $p > 1$. Demuestre que la función g es estrictamente convexa.

C. Sean $p > 1$ y $a, b \geqslant 0$. Demuestre que

$$(a + b)^p \geqslant 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Ejercicio 14. *10 %.*
Concavidad de la función arcotangente.

A. Recuerde la definición de la función $\operatorname{arc\,tg}\colon \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Calcule $\operatorname{arc\,tg}'$ y $\operatorname{arc\,tg}''$.

B. Usando la segunda derivada demuestre que $\operatorname{arc\,tg}$ es estrictamente cóncava en $]0, +\infty[$.

C. Usando el resultado de B demuestre que para cada $x > 0$,

$$x > \operatorname{arc\,tg}(x).$$