Análisis Matemático II, LFM.
Tarea 1.
Variante α.

Operaciones con conjuntos, preimagen de un conjunto bajo una función, sucesiones monótonas de intervalos, estructura de subconjuntos abiertos del eje real, supremo e ínfimo de un conjunto, convergencia puntual y uniforme de una sucesión de funciones.

Ejercicio 1. *10 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$p \oplus q \equiv (p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q) \equiv (p \vee q) \wedge \overline{(p \wedge q)}.$$

II. Definimos la **diferencia simétrica** de dos conjuntos A y B como

$$A \triangle B = \{x\colon\ (x \in A) \oplus (x \in B)\}.$$

Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Ejercicio 2. *15 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$(p \vee q) \wedge r = (p \wedge q) \vee (q \wedge r).$$

II. Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

III. Demostrar la fórmula del inciso II por medio de diagramas de Euler–Venn (dibujar un diagrama para cada paso).

Ejercicio 3. *7 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^2 - 4x + 1, \quad B = (-2, 1].$$

Ejercicio 4. *8 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := 3 - |x - 1|, \quad B = (2, 4).$$

Ejercicio 5. *5 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f, si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función característica del conjunto $[2, 5)$, $B = (-1, 1/2)$.

Ejercicio 6. *10 %.*
Mostrar en el plano la **preimagen** del conjunto B bajo la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$f(x, y) := x^2 - 4y^2, \qquad B = (0, +\infty).$$

Ejercicio 7. *10 %.*
Se considera la **sucesión creciente de intervalos** $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, donde

$$A_n = \left(-3 + \frac{1}{n}, 2\right].$$

I. Calcular la unión $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Hay que escribir la respuesta y una demostración completa.

II. Hallar las diferencias $D_k := A_k \setminus A_{k-1}$, donde $k \in \{1, 2, \ldots\}$, $A_0 := \varnothing$.

III. Verificar directamente las siguientes igualdades (μ es la longitud de intervalos):

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k).$$

Ejercicio 8. *10 %.*
Hallar **el supremo y el ínfimo** de cada uno de los siguientes conjuntos. Enunciar la respuesta y escribir una demostración.

- $A = (\sqrt{3}, 5) \cap \mathbb{Q}$.
- $B = \left\{3\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Ejercicio 9. *10 %.*
Demostrar la siguiente relación límite, usando solamente la definición del límite (ε-δ):

$$\lim_{x\to 1}(x^2 - 7x + 4) = -2.$$

Ejercicio 10. *15 %.*
Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas mediante la regla

$$f_n(x) = \operatorname{arc\,tg}(nx).$$

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3, 4$.
2. Para cada x en $\mathbb{R}$, calcular el siguiente límite:

$$g(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

3. Para cada n en $\{1, 2, 3, \ldots\}$, calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Análisis Matemático II, LFM.
Tarea 1.
Variante β.

Operaciones con conjuntos, preimagen de un conjunto bajo una función, sucesiones monótonas de intervalos, estructura de subconjuntos abiertos del eje real, supremo e ínfimo de un conjunto, convergencia puntual y uniforme de una sucesión de funciones.

Ejercicio 1. *10 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$p \vee (\overline{p} \wedge q) \equiv p \vee q.$$

II. Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$A \cup (B \setminus A) = A \cup B.$$

Ejercicio 2. *15 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$(p \oplus q) \to ((p \oplus r) \vee (r \oplus q)) \equiv 1.$$

II. Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B).$$

III. Demostrar la fórmula del inciso II por medio de diagramas de Euler–Venn (dibujar un diagrama para cada paso).

Ejercicio 3. *7 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := -x^2 - 2x + 1, \quad B = [-2, 0).$$

Ejercicio 4. *8 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := |x + 2| - 2, \quad B = (-2, 1].$$

Ejercicio 5. *5 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f, si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función característica del conjunto $[-1, 4]$, $B = (0, 2]$.

Ejercicio 6. *10 %.*
Mostrar en el plano la **preimagen** del conjunto B bajo la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$f(x, y) := 4x - y^2, \qquad B = (-\infty, 0].$$

Ejercicio 7. *10 %.*
Se considera la **sucesión decreciente de intervalos** $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, donde

$$A_n = \left(-1 - \frac{1}{n}, 3\right].$$

I. Calcular la intersección $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Hay que escribir la respuesta y una demostración completa.

II. Hallar las diferencias $D_k := A_k \setminus A_{k+1}$, donde $k \in \{1, 2, \ldots\}$.

III. Verificar directamente la siguiente igualdad (μ es la longitud de intervalos):

$$\mu(A_1) = \mu(B) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k).$$

Ejercicio 8. *10 %.*
Hallar **el supremo y el ínfimo** de cada uno de los siguientes conjuntos. Enunciar la respuesta y escribir una demostración.

- $A = [-4, \sqrt{11}] \cap \mathbb{Q}$.
- $B = \left\{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Ejercicio 9. *10 %.*
Demostrar la siguiente relación límite, usando solamente la definición del límite (ε-δ):

$$\lim_{x \to -2} (x^2 + x + 5) = 7.$$

Ejercicio 10. *15 %.*
Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ definidas mediante la regla

$$f_n(x) = x^n.$$

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3, 4$.
2. Para cada x en $[0, 1]$, calcular el siguiente límite:

$$g(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

3. Para cada n en $\{1, 2, 3, \ldots\}$, calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Análisis Matemático II, LFM.
Tarea 1.
Variante 1.

Operaciones con conjuntos, preimagen de un conjunto bajo una función, sucesiones monótonas de intervalos, estructura de subconjuntos abiertos del eje real, supremo e ínfimo de un conjunto, convergencia puntual y uniforme de una sucesión de funciones.

Ejercicio 1. *10 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$p \to q \equiv (p \vee q) \leftrightarrow q.$$

II. Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$A \subseteq B \quad \Longleftrightarrow \quad A \cup B = B.$$

Ejercicio 2. *15 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$p \vee q \equiv (p \oplus q) \oplus (p \wedge q).$$

II. Definimos la diferencia simétrica de conjuntos mediante la operación lógica $\oplus$:

$$A \triangle B := \{x\colon\ x \in A \ \oplus\ x \in B\}.$$

Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B).$$

III. Demostrar la fórmula del inciso II por medio de diagramas de Euler–Venn (dibujar un diagrama para cada paso).

Ejercicio 3. *7 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^2 + 6x + 6, \quad B = [-1, 1).$$

Ejercicio 4. *8 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := 1 - |x + 2|, \quad B = [-2, 0).$$

Ejercicio 5. *5 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f, si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función característica del conjunto $[-3, 1)$, $B = [0, 1)$.

Ejercicio 6. *10 %.*
Mostrar en el plano la **preimagen** del conjunto B bajo la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$f(x, y) \coloneqq -x + y^2, \qquad B = (-\infty, 1].$$

Ejercicio 7. *10 %.*
Se considera la **sucesión creciente de intervalos** $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, donde

$$A_n = \left(-3 + \frac{1}{n}, 2\right].$$

I. Calcular la unión $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Hay que escribir la respuesta y una demostración completa.

II. Hallar las diferencias $D_k \coloneqq A_k \setminus A_{k-1}$, donde $k \in \{1, 2, \ldots\}$, $A_0 \coloneqq \varnothing$.

III. Verificar directamente las siguientes igualdades (μ es la longitud de intervalos):

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k).$$

Ejercicio 8. *10 %.*
Hallar **el supremo y el ínfimo** de cada uno de los siguientes conjuntos. Enunciar la respuesta y escribir una demostración.

- $A = (2, 5] \cap \mathbb{Q}$.
- $B = \left\{2(-1)^n - \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Se recomienda partir B en varios conjuntos cuyos supremos e ínfimos se calculan fácilmente.

Ejercicio 9. *10 %.*
Demostrar la siguiente relación límite, usando solamente la definición del límite (ε-δ):

$$\lim_{x\to 3} (x^2 - 2x + 2) = 5.$$

Ejercicio 10. *15 %.*
Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas mediante la regla

$$f_n(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{n}\right).$$

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3, 4$.
2. Para cada x en $\mathbb{R}$, calcular el siguiente límite:
$$g(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$
3. Para cada n en $\{1, 2, 3, \ldots\}$, calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Análisis Matemático II, LFM.
Tarea 1.
Variante 2.

Operaciones con conjuntos, preimagen de un conjunto bajo una función, sucesiones monótonas de intervalos, estructura de subconjuntos abiertos del eje real, supremo e ínfimo de un conjunto, convergencia puntual y uniforme de una sucesión de funciones.

Ejercicio 1. *10 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$p \to (p \vee q) \equiv 1.$$

II. Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$A \subseteq A \cup B.$$

Ejercicio 2. *15 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$p \wedge \overline{(q \vee r)} \equiv (p \wedge \overline{q}) \wedge (p \wedge \overline{r}).$$

II. Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

III. Demostrar la fórmula del inciso II por medio de diagramas de Euler–Venn (dibujar un diagrama para cada paso).

Ejercicio 3. *7 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := -x^2 - 4x - 3, \quad B = (-3, -2].$$

Ejercicio 4. *8 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := |x + 1| - 3, \quad B = (-2, 1].$$

Ejercicio 5. *5 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f, si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función característica del conjunto $[-1, 3)$, $B = (-2, 1)$.

Ejercicio 6. *10 %.*
Mostrar en el plano la **preimagen** del conjunto B bajo la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$f(x, y) \coloneqq x^2 + y^2 - 6y, \qquad B = (13, +\infty).$$

Ejercicio 7. *10 %.*
Se considera la **sucesión decreciente de intervalos** $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, donde

$$A_n = \left(-5,\, 1 + \frac{1}{n}\right].$$

I. Calcular la intersección $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Hay que escribir la respuesta y una demostración completa.

II. Hallar las diferencias $D_k \coloneqq A_k \setminus A_{k+1}$, donde $k \in \{1, 2, \ldots\}$.

III. Verificar directamente la siguiente igualdad (μ es la longitud de intervalos):

$$\mu(A_1) = \mu(B) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k).$$

Ejercicio 8. *10 %.*
Hallar **el supremo y el ínfimo** de cada uno de los siguientes conjuntos. Enunciar la respuesta y escribir una demostración.

- $A = [3, \sqrt{6}) \cap \mathbb{Q}$.
- $B = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Se recomienda partir B en varios conjuntos cuyos supremos e ínfimos se calculan fácilmente.

Ejercicio 9. *10 %.*
Demostrar la siguiente relación límite, usando solamente la definición del límite (ε-δ):

$$\lim_{x \to -1} (x^2 + 5x + 1) = -3.$$

Ejercicio 10. *15 %.*
Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas mediante la regla

$$f_n(x) = \frac{2nx}{x^2 + n^2}.$$

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3, 4$.
2. Para cada x en $\mathbb{R}$, calcular el siguiente límite:

$$g(x) \coloneqq \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

3. Para cada n en $\{1, 2, 3, \ldots\}$, calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Análisis Matemático II, LFM.
Tarea 1.
Variante 3.

Operaciones con conjuntos, preimagen de un conjunto bajo una función, sucesiones monótonas de intervalos, estructura de subconjuntos abiertos del eje real, supremo e ínfimo de un conjunto, convergencia puntual y uniforme de una sucesión de funciones.

Ejercicio 1. *10 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$(p \wedge q) \to p \equiv 1.$$

II. Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$A \cap B \subseteq A.$$

Ejercicio 2. *15 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$(p \oplus q) \oplus r \equiv p \oplus (q \oplus r).$$

II. Definimos la diferencia simétrica de conjuntos mediante la operación lógica $\oplus$:

$$A \triangle B := \{x\colon\ x \in A \ \oplus\ x \in B\}.$$

Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

III. Demostrar la fórmula del inciso II por medio de diagramas de Euler–Venn (dibujar un diagrama para cada paso).

Ejercicio 3. *7 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^2 - 6x + 8, \quad B = (0, 2].$$

Ejercicio 4. *8 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := 2 - |x - 1|, \quad B = (-1, 0).$$

Ejercicio 5. *5 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f, si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función característica del conjunto $(3, 5)$, $B = (-1, 1)$.

Ejercicio 6. *10 %.*
Mostrar en el plano la **preimagen** del conjunto B bajo la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$f(x, y) := x - y^2, \qquad B = (3, +\infty).$$

Ejercicio 7. *10 %.*
Se considera la **sucesión creciente de intervalos** $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, donde

$$A_n = \left[2 + \frac{1}{n}, 4\right].$$

I. Calcular la unión $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Hay que escribir la respuesta y una demostración completa.

II. Hallar las diferencias $D_k := A_k \setminus A_{k-1}$, donde $k \in \{1, 2, \ldots\}$, $A_0 := \varnothing$.

III. Verificar directamente las siguientes igualdades (μ es la longitud de intervalos):

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k).$$

Ejercicio 8. *10 %.*
Hallar **el supremo y el ínfimo** de cada uno de los siguientes conjuntos. Enunciar la respuesta y escribir una demostración.

- $A = (-1, 2] \cap \mathbb{Q}$.
- $B = \left\{3(-1)^n + \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Se recomienda partir B en varios conjuntos cuyos supremos e ínfimos se calculan fácilmente.

Ejercicio 9. *10 %.*
Demostrar la siguiente relación límite, usando solamente la definición del límite (ε-δ):

$$\lim_{x\to 2}(x^2 + 3x + 5) = 15.$$

Ejercicio 10. *15 %.*
Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ definidas mediante la regla

$$f_n(x) = x^{1/n}.$$

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3, 4$.
2. Para cada x en $[0, 1]$, calcular el siguiente límite:

$$g(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

3. Para cada n en $\{1, 2, 3, \ldots\}$, calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Análisis Matemático II, LFM.
Tarea 1.
Variante 4.

Operaciones con conjuntos, preimagen de un conjunto bajo una función, sucesiones monótonas de intervalos, estructura de subconjuntos abiertos del eje real, supremo e ínfimo de un conjunto, convergencia puntual y uniforme de una sucesión de funciones.

Ejercicio 1. *10 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p.$$

II. Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$A \cap (A \cup B) = A.$$

Ejercicio 2. *15 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$(p \wedge \overline{q}) \rightarrow ((p \wedge \overline{r}) \vee (r \wedge \overline{q})) \equiv 1.$$

II. Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$A \setminus B \subseteq (A \setminus C) \cup (C \setminus B).$$

III. Demostrar la fórmula del inciso II por medio de diagramas de Euler–Venn (dibujar un diagrama para cada paso).

Ejercicio 3. *7 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := -x^2 - 2x, \quad B = [-1, 1).$$

Ejercicio 4. *8 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := |x - 2| - 1, \quad B = (-1, 2].$$

Ejercicio 5. *5 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f, si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función característica del conjunto $(-1, 2)$, $B = (0, 4]$.

Ejercicio 6. *10 %.*
Mostrar en el plano la **preimagen** del conjunto B bajo la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$f(x, y) \coloneqq x^2 - y^2, \qquad B = (-\infty, 1).$$

Ejercicio 7. *10 %.*
Se considera la **sucesión decreciente de intervalos** $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, donde

$$A_n = \left(-2 - \frac{1}{n}, -1\right].$$

I. Calcular la intersección $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Hay que escribir la respuesta y una demostración completa.

II. Hallar las diferencias $D_k \coloneqq A_k \backslash A_{k+1}$, donde $k \in \{1, 2, \ldots\}$.

III. Verificar directamente la siguiente igualdad (μ es la longitud de intervalos):

$$\mu(A_1) = \mu(B) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k).$$

Ejercicio 8. *10 %.*
Hallar **el supremo y el ínfimo** de cada uno de los siguientes conjuntos. Enunciar la respuesta y escribir una demostración.

- $A = [5, 8) \cap \mathbb{Q}$.
- $B = \left\{(-1)^n - \frac{2}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Se recomienda partir B en varios conjuntos cuyos supremos e ínfimos se calculan fácilmente.

Ejercicio 9. *10 %.*
Demostrar la siguiente relación límite, usando solamente la definición del límite (ε-δ):

$$\lim_{x \to -3} (x^2 - x + 4) = 16.$$

Ejercicio 10. *15 %.*
Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definidas mediante la regla

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}.$$

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3, 4$.
2. Para cada x en $[0, +\infty)$, calcular el siguiente límite:

$$g(x) \coloneqq \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

3. Para cada n en $\{1, 2, 3, \ldots\}$, calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Análisis Matemático II, LFM.
Tarea 1.
Variante 5.

Operaciones con conjuntos, preimagen de un conjunto bajo una función, sucesiones monótonas de intervalos, estructura de subconjuntos abiertos del eje real, supremo e ínfimo de un conjunto, convergencia puntual y uniforme de una sucesión de funciones.

Ejercicio 1. *10 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p.$$

II. Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$A \cup (A \cap B) = A.$$

Ejercicio 2. *15 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$(p \oplus q) \to ((p \oplus r) \vee (r \oplus q)) \equiv 1.$$

II. Definimos la diferencia simétrica de conjuntos mediante la operación lógica $\oplus$:

$$A \triangle B := \{x\colon\ x \in A\ \oplus\ x \in B\}.$$

Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B).$$

III. Demostrar la fórmula del inciso II por medio de diagramas de Euler–Venn (dibujar un diagrama para cada paso).

Ejercicio 3. *7 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^2 + 2x - 1, \quad B = (0, 2].$$

Ejercicio 4. *8 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := 1 - |x + 3|, \quad B = (-2, -1].$$

Ejercicio 5. *5 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f, si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función característica del conjunto $(1,4]$, $B = (-3, 1/2]$.

Ejercicio 6. *10 %.*
Mostrar en el plano la **preimagen** del conjunto B bajo la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$f(x,y) := \frac{x^2}{4} + y^2, \qquad B = [1, +\infty).$$

Ejercicio 7. *10 %.*
Se considera la **sucesión creciente de intervalos** $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, donde

$$A_n = \left(-1, 3 - \frac{1}{n}\right].$$

I. Calcular la unión $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Hay que escribir la respuesta y una demostración completa.

II. Hallar las diferencias $D_k := A_k \setminus A_{k-1}$, donde $k \in \{1, 2, \ldots\}$, $A_0 := \varnothing$.

III. Verificar directamente las siguientes igualdades (μ es la longitud de intervalos):

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k).$$

Ejercicio 8. *10 %.*
Hallar **el supremo y el ínfimo** de cada uno de los siguientes conjuntos. Enunciar la respuesta y escribir una demostración.

- $A = (-2, 3] \cap \mathbb{Q}$.
- $B = \left\{\frac{1}{n} + \cos\frac{n\pi}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Se recomienda partir B en varios conjuntos cuyos supremos e ínfimos se calculan fácilmente.

Ejercicio 9. *10 %.*
Demostrar la siguiente relación límite, usando solamente la definición del límite (ε-δ):

$$\lim_{x\to-2} (x^2 + 3x + 1) = -1.$$

Ejercicio 10. *15 %.*
Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definidas mediante la regla

$$f_n(x) = \exp\left(-nx\right).$$

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3, 4$.
2. Para cada x en $[0, +\infty)$, calcular el siguiente límite:

$$g(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

3. Para cada n en $\{1, 2, 3, \ldots\}$, calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Análisis Matemático II, LFM.
Tarea 1.
Variante 6.

Operaciones con conjuntos, preimagen de un conjunto bajo una función, sucesiones monótonas de intervalos, estructura de subconjuntos abiertos del eje real, supremo e ínfimo de un conjunto, convergencia puntual y uniforme de una sucesión de funciones.

Ejercicio 1. *10 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$p \to q \equiv (p \wedge q) \leftrightarrow p.$$

II. Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$A \subseteq B \quad \Longleftrightarrow \quad A \cap B = A.$$

Ejercicio 2. *15 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$p \wedge \overline{(q \wedge r)} \equiv (p \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge \overline{r}).$$

II. Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

III. Demostrar la fórmula del inciso II por medio de diagramas de Euler–Venn (dibujar un diagrama para cada paso).

Ejercicio 3. *7 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := -x^2 - 4x - 5, \quad B = [-5, -1).$$

Ejercicio 4. *8 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := |x + 1| - 3, \quad B = (-2, 2].$$

Ejercicio 5. *5 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f, si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función característica del conjunto $[-4,-2]$, $B = (0,1]$.

Ejercicio 6. *10 %.*
Mostrar en el plano la **preimagen** del conjunto B bajo la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$f(x,y) := x^2 - 4x + y^2, \qquad B = (-\infty, 9].$$

Ejercicio 7. *10 %.*
Se considera la **sucesión decreciente de intervalos** $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, donde

$$A_n = \left[2 - \frac{1}{n}, 4 + \frac{1}{n}\right].$$

I. Calcular la intersección $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Hay que escribir la respuesta y una demostración completa.

II. Hallar las diferencias $D_k := A_k \setminus A_{k+1}$, donde $k \in \{1,2,\ldots\}$.

III. Verificar directamente la siguiente igualdad (μ es la longitud de intervalos):

$$\mu(A_1) = \mu(B) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k).$$

Ejercicio 8. *10 %.*
Hallar **el supremo y el ínfimo** de cada uno de los siguientes conjuntos. Enunciar la respuesta y escribir una demostración.

- $A = (3, +\infty) \cap \mathbb{Q}$.
- $B = \left\{\frac{3}{n} + (-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$. Se recomienda partir B en varios conjuntos cuyos supremos e ínfimos se calculan fácilmente.

Ejercicio 9. *10 %.*
Demostrar la siguiente relación límite, usando solamente la definición del límite (ε-δ):

$$\lim_{x \to -1} (x^2 - 7x + 5) = 13.$$

Ejercicio 10. *15 %.*
Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas mediante la regla

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + (x-n)^2}.$$

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1,2,3,4$.
2. Para cada x en $\mathbb{R}$, calcular el siguiente límite:

$$g(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

3. Para cada n en $\{1,2,3,\ldots\}$, calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Análisis Matemático II, LFM.
Tarea 1.
Variante 7.

Operaciones con conjuntos, preimagen de un conjunto bajo una función, sucesiones monótonas de intervalos, estructura de subconjuntos abiertos del eje real, supremo e ínfimo de un conjunto, convergencia puntual y uniforme de una sucesión de funciones.

Ejercicio 1. *10 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$p \wedge \overline{(p \wedge q)} \equiv p \wedge \overline{q}.$$

II. Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$A \setminus (A \cap B) = A \setminus B.$$

Ejercicio 2. *15 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$(p \wedge \overline{q}) \vee r \equiv= (p \vee r) \wedge \overline{(q \wedge \overline{r})}.$$

II. Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \setminus C).$$

III. Demostrar la fórmula del inciso II por medio de diagramas de Euler–Venn (dibujar un diagrama para cada paso).

Ejercicio 3. *7 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^2 + 6x + 6, \quad B = (-2, 1].$$

Ejercicio 4. *8 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := 2 - |x + 2|, \quad B = [-1, 1).$$

Ejercicio 5. *5 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f, si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función característica del conjunto $(-3, 1]$, $B = [1/2, 3]$.

Ejercicio 6. *10 %.*
Mostrar en el plano la **preimagen** del conjunto B bajo la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$f(x, y) \coloneqq \frac{x^2}{9} - y^2, \qquad B = (0, +\infty).$$

Ejercicio 7. *10 %.*
Se considera la **sucesión creciente de intervalos** $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, donde

$$A_n = \left[2 + \frac{1}{n}, 5\right).$$

I. Calcular la unión $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Hay que escribir la respuesta y una demostración completa.

II. Hallar las diferencias $D_k \coloneqq A_k \setminus A_{k-1}$, donde $k \in \{1, 2, \ldots\}$, $A_0 \coloneqq \varnothing$.

III. Verificar directamente las siguientes igualdades (μ es la longitud de intervalos):

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k).$$

Ejercicio 8. *10 %.*
Hallar **el supremo y el ínfimo** de cada uno de los siguientes conjuntos. Enunciar la respuesta y escribir una demostración.

- $A = (-\infty, -5] \cap \mathbb{Q}$.
- $B = \left\{\frac{1}{n} + \cos\frac{n\pi}{3}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Se recomienda partir B en varios conjuntos cuyos supremos e ínfimos se calculan fácilmente.

Ejercicio 9. *10 %.*
Demostrar la siguiente relación límite, usando solamente la definición del límite (ε-δ):

$$\lim_{x\to 3}(x^2 + 2x + 5) = 20.$$

Ejercicio 10. *15 %.*
Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas mediante la regla

$$f_n(x) = \frac{|x - n|}{1 + |x - n|}.$$

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3, 4$.
2. Para cada x en $\mathbb{R}$, calcular el siguiente límite:

$$g(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

3. Para cada n en $\{1, 2, 3, \ldots\}$, calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.

Análisis Matemático II, LFM.
Tarea 1.
Variante 8.

Operaciones con conjuntos, preimagen de un conjunto bajo una función, sucesiones monótonas de intervalos, estructura de subconjuntos abiertos del eje real, supremo e ínfimo de un conjunto, convergencia puntual y uniforme de una sucesión de funciones.

Ejercicio 1. *10 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$(p \vee q) \wedge \overline{q} \equiv p \wedge \overline{q}.$$

II. Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$(A \cup B) \setminus B = A \setminus B.$$

Ejercicio 2. *15 %.*
I. Con una tabla de verdad demostrar la siguiente identidad para proposiciones:

$$(p \oplus q) \wedge r = (p \wedge r) \oplus (q \wedge r).$$

II. Definimos la diferencia simétrica de conjuntos mediante la operación lógica $\oplus$:

$$A \bigtriangleup B := \{x\colon\ x \in A \ \oplus\ x \in B\}.$$

Usando el resultado del inciso I demostrar la siguiente **propiedad de operaciones con conjuntos**:

$$(A \bigtriangleup B) \cap C = (A \cap C) \bigtriangleup (B \cap C).$$

III. Demostrar la fórmula del inciso II por medio de diagramas de Euler–Venn (dibujar un diagrama para cada paso).

Ejercicio 3. *7 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := -x^2 - 4x - 2, \quad B = (-4, 1].$$

Ejercicio 4. *8 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f y hacer un dibujo.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := 4 - |x - 5|, \quad B = [1, 3).$$

Ejercicio 5. *5 %.*
Calcular la **preimagen** del conjunto B bajo la función f, si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función característica del conjunto $(-7, 4]$, $B = (1/3, 2]$.

Ejercicio 6. *10 %.*
Mostrar en el plano la **preimagen** del conjunto B bajo la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$f(x, y) := x^2 + \frac{y^2}{9}, \qquad B = (-5, 1).$$

Ejercicio 7. *10 %.*
Se considera la **sucesión decreciente de intervalos** $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, donde

$$A_n = \left[-2 - \frac{1}{n}, 3\right].$$

I. Calcular la intersección $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Hay que escribir la respuesta y una demostración completa.

II. Hallar las diferencias $D_k := A_k \setminus A_{k+1}$, donde $k \in \{1, 2, \ldots\}$.

III. Verificar directamente la siguiente igualdad (μ es la longitud de intervalos):

$$\mu(A_1) = \mu(B) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_k).$$

Ejercicio 8. *10 %.*
Hallar **el supremo y el ínfimo** de cada uno de los siguientes conjuntos. Enunciar la respuesta y escribir una demostración.

- $A = [-3, 1) \cap \mathbb{Q}$.
- $B = \left\{\frac{2}{n} - \cos\frac{n\pi}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Ejercicio 9. *10 %.*
Demostrar la siguiente relación límite, usando solamente la definición del límite (ε-δ):

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - 4x + 3) = -1.$$

Ejercicio 10. *15 %.*
Analizar la **convergencia puntual** y la **convergencia uniforme** de la sucesión de funciones $f_n\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definidas mediante la regla

$$f_n(x) = \frac{x}{n + x}.$$

1. Dibujar las gráficas de f_n para $n = 1, 2, 3, 4$.
2. Para cada x en $(0, +\infty)$, calcular el siguiente límite:

$$g(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

3. Para cada n en $\{1, 2, 3, \ldots\}$, calcular la norma uniforme de la función $f_n - g$. Hacer una conclusión sobre la convergencia uniforme.