

Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2.

Variante 1.

Ejemplos de análisis de varios modos de convergencia.

En cada uno de los siguientes dos ejercicios están dadas funciones $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: X \rightarrow \mathbb{R}$. Hay que **analizar varios modos de convergencia** de la sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ a la función g . Se recomienda el plan:

- Mostrar las gráficas de f_n o las gráficas de $|f_n - g|$ para algunos valores pequeños de n y para un valor de n bastante grande (por ejemplo, $n = 20$ o más grande). Elegir los dominios de las gráficas de manera adecuada.
- Para todo punto x en X , usando la definición del límite, hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.
- Usando el resultado del inciso b) determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g en todos puntos de X ; en casi todos puntos de X .
- Para todo n en \mathbb{N} calcular $\|f_n - g\|_{\text{sup}} := \sup_{x \in X} |f_n(x) - g(x)|$.
- Determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.
- Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n)$. En los incisos f), h), i) es suficiente elegir algún $\varepsilon_0 > 0$ y calcular $A(\varepsilon, n)$ para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.
- Determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g en medida μ .
- Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k)$.
- Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon)$.
- Calcular D como la unión de los $C(\varepsilon)$. Hacer la conclusión.
- Utilizando el resultado del inciso h) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme, llamada también la convergencia de Egórov.
- Si el inciso k) tiene respuesta positiva, entonces para todo $\eta > 0$ construir un conjunto medible E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 1. 55 %.

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = \frac{1}{\cosh(x - n)}$, $g(x) = 0$.

Ejercicio 2. 45 %.

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $g(x) = 0$,

$$f_n(x) = (1 - |x - n|) \cdot \mathbf{1}_{[n-1, n+1]}(x), \quad \text{esto es,} \quad f_n(x) = \begin{cases} 1 - |x - n|, & |x - n| \leq 1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2.

Variante 2.

Ejemplos de análisis de varios modos de convergencia.

En cada uno de los siguientes dos ejercicios están dadas funciones $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: X \rightarrow \mathbb{R}$. Hay que **analizar varios modos de convergencia** de la sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ a la función g . Se recomienda el plan:

- a) Mostrar las gráficas de f_n o las gráficas de $|f_n - g|$ para algunos valores pequeños de n y para un valor de n bastante grande (por ejemplo, $n = 20$ o más grande). Elegir los dominios de las gráficas de manera adecuada.
- b) Para todo punto x en X , usando la definición del límite, hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.
- c) Usando el resultado del inciso b) determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g en todos puntos de X ; en casi todos puntos de X .
- d) Para todo n en \mathbb{N} calcular $\|f_n - g\|_{\text{sup}} := \sup_{x \in X} |f_n(x) - g(x)|$.
- e) Determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.
- f) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n)$. En los incisos f), h), i) es suficiente elegir algún $\varepsilon_0 > 0$ y calcular $A(\varepsilon, n)$ para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.
- g) Determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g en medida μ .
- h) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k)$.
- i) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon)$.
- j) Calcular D como la unión de los $C(\varepsilon)$. Hacer la conclusión.
- k) Utilizando el resultado del inciso h) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme, llamada también la convergencia de Egórov.
- l) Si el inciso k) tiene respuesta positiva, entonces para todo $\eta > 0$ construir un conjunto medible E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 1. 55 %.

$X = [0, 1]$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = 4^n x^n (1 - x)^n$, $g(x) = 0$.

Ejercicio 2. 45 %.

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $g(x) = 1$,

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{|x|}{n}\right) \cdot 1_{[-n, n]}(x), \quad \text{esto es,} \quad f_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{n}, & |x| \leq n; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2.

Variante 3.

Ejemplos de análisis de varios modos de convergencia.

En cada uno de los siguientes dos ejercicios están dadas funciones $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: X \rightarrow \mathbb{R}$. Hay que **analizar varios modos de convergencia** de la sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ a la función g . Se recomienda el plan:

- Mostrar las gráficas de f_n o las gráficas de $|f_n - g|$ para algunos valores pequeños de n y para un valor de n bastante grande (por ejemplo, $n = 20$ o más grande). Elegir los dominios de las gráficas de manera adecuada.
- Para todo punto x en X , usando la definición del límite, hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.
- Usando el resultado del inciso b) determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g en todos puntos de X ; en casi todos puntos de X .
- Para todo n en \mathbb{N} calcular $\|f_n - g\|_{\text{sup}} := \sup_{x \in X} |f_n(x) - g(x)|$.
- Determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.
- Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n)$. En los incisos f), h), i) es suficiente elegir algún $\varepsilon_0 > 0$ y calcular $A(\varepsilon, n)$ para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.
- Determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g en medida μ .
- Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k)$.
- Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon)$.
- Calcular D como la unión de los $C(\varepsilon)$. Hacer la conclusión.
- Utilizando el resultado del inciso h) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme, llamada también la convergencia de Egórov.
- Si el inciso k) tiene respuesta positiva, entonces para todo $\eta > 0$ construir un conjunto medible E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 1. 55 %.

$X = (0, +\infty)$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = \tanh(nx)$, $g(x) = 1$.

Ejercicio 2. 45 %.

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $g(x) = 0$,

$$f_n(x) = (1 - n \cdot |x - n|) \cdot 1_{[n-1/n, n+1/n]}(x), \quad \text{esto es,} \quad f_n(x) = \begin{cases} 1 - n \cdot |x - n|, & |x - n| \leq 1/n; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2.

Variante 4.

Ejemplos de análisis de varios modos de convergencia.

En cada uno de los siguientes dos ejercicios están dadas funciones $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: X \rightarrow \mathbb{R}$. Hay que **analizar varios modos de convergencia** de la sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ a la función g . Se recomienda el plan:

- a) Mostrar las gráficas de f_n o las gráficas de $|f_n - g|$ para algunos valores pequeños de n y para un valor de n bastante grande (por ejemplo, $n = 20$ o más grande). Elegir los dominios de las gráficas de manera adecuada.
- b) Para todo punto x en X , usando la definición del límite, hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.
- c) Usando el resultado del inciso b) determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g en todos puntos de X ; en casi todos puntos de X .
- d) Para todo n en \mathbb{N} calcular $\|f_n - g\|_{\text{sup}} := \sup_{x \in X} |f_n(x) - g(x)|$.
- e) Determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.
- f) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n)$. En los incisos f), h), i) es suficiente elegir algún $\varepsilon_0 > 0$ y calcular $A(\varepsilon, n)$ para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.
- g) Determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g en medida μ .
- h) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k)$.
- i) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon)$.
- j) Calcular D como la unión de los $C(\varepsilon)$. Hacer la conclusión.
- k) Utilizando el resultado del inciso h) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme, llamada también la convergencia de Egórov.
- l) Si el inciso k) tiene respuesta positiva, entonces para todo $\eta > 0$ construir un conjunto medible E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 1. 55 %.

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = \frac{6(x-n)}{(x-n)^2 + 1}$, $g(x) = 0$.

Ejercicio 2. 45 %.

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $g(x) = 0$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1_{[n, n+2]}, & n \text{ par;} \\ 1_{]-(n+2), -n]}, & n \text{ impar.} \end{cases}$$

Indicación: calcular $A(\varepsilon, n)$ para n pares e impares, luego $B(\varepsilon, k)$ para k pares e impares.

Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2.

Variante 5.

Ejemplos de análisis de varios modos de convergencia.

En cada uno de los siguientes dos ejercicios están dadas funciones $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: X \rightarrow \mathbb{R}$. Hay que **analizar varios modos de convergencia** de la sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ a la función g . Se recomienda el plan:

- a) Mostrar las gráficas de f_n o las gráficas de $|f_n - g|$ para algunos valores pequeños de n y para un valor de n bastante grande (por ejemplo, $n = 20$ o más grande). Elegir los dominios de las gráficas de manera adecuada.
- b) Para todo punto x en X , usando la definición del límite, hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.
- c) Usando el resultado del inciso b) determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g en todos puntos de X ; en casi todos puntos de X .
- d) Para todo n en \mathbb{N} calcular $\|f_n - g\|_{\text{sup}} := \sup_{x \in X} |f_n(x) - g(x)|$.
- e) Determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.
- f) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n)$. En los incisos f), h), i) es suficiente elegir algún $\varepsilon_0 > 0$ y calcular $A(\varepsilon, n)$ para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.
- g) Determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g en medida μ .
- h) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k)$.
- i) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon)$.
- j) Calcular D como la unión de los $C(\varepsilon)$. Hacer la conclusión.
- k) Utilizando el resultado del inciso h) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme, llamada también la convergencia de Egórov.
- l) Si el inciso k) tiene respuesta positiva, entonces para todo $\eta > 0$ construir un conjunto medible E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 1. 55 %.

$X = [0, \pi]$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = \cos \frac{x}{n}$, $g(x) = 1$.

Ejercicio 2. 45 %.

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $g(x) = 0$,

$$f_n(x) = \left(1 - n \left|x - \frac{1}{n}\right|\right) \cdot 1_{[0, 2/n]}(x), \quad \text{esto es,} \quad f_n(x) = \begin{cases} 1 - n \left|x - \frac{1}{n}\right|, & 0 \leq x \leq 2/n; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2.

Variante 6.

Ejemplos de análisis de varios modos de convergencia.

En cada uno de los siguientes dos ejercicios están dadas funciones $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: X \rightarrow \mathbb{R}$. Hay que **analizar varios modos de convergencia** de la sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ a la función g . Se recomienda el plan:

- a) Mostrar las gráficas de f_n o las gráficas de $|f_n - g|$ para algunos valores pequeños de n y para un valor de n bastante grande (por ejemplo, $n = 20$ o más grande). Elegir los dominios de las gráficas de manera adecuada.
- b) Para todo punto x en X , usando la definición del límite, hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.
- c) Usando el resultado del inciso b) determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g en todos puntos de X ; en casi todos puntos de X .
- d) Para todo n en \mathbb{N} calcular $\|f_n - g\|_{\text{sup}} := \sup_{x \in X} |f_n(x) - g(x)|$.
- e) Determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.
- f) Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n)$. En los incisos f), h), i) es suficiente elegir algún $\varepsilon_0 > 0$ y calcular $A(\varepsilon, n)$ para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.
- g) Determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g en medida μ .
- h) Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k)$.
- i) Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon)$.
- j) Calcular D como la unión de los $C(\varepsilon)$. Hacer la conclusión.
- k) Utilizando el resultado del inciso h) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme, llamada también la convergencia de Egórov.
- l) Si el inciso k) tiene respuesta positiva, entonces para todo $\eta > 0$ construir un conjunto medible E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 1. 55 %.

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$, $g(x) = 0$.

Ejercicio 2. 45 %.

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $g(x) = 0$,

$$f_n(x) = (1 + (-1)^n) 1_{[n, 2n]}.$$

Indicación: calcular $A(\varepsilon, n)$ para n pares e impares, luego $B(\varepsilon, k)$ para k pares e impares.

Análisis Matemático II, LFM. Tarea 2.

Variante 7.

Ejemplos de análisis de varios modos de convergencia.

En cada uno de los siguientes dos ejercicios están dadas funciones $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: X \rightarrow \mathbb{R}$. Hay que **analizar varios modos de convergencia** de la sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ a la función g . Se recomienda el plan:

- Mostrar las gráficas de f_n o las gráficas de $|f_n - g|$ para algunos valores pequeños de n y para un valor de n bastante grande (por ejemplo, $n = 20$ o más grande). Elegir los dominios de las gráficas de manera adecuada.
- Para todo punto x en X , usando la definición del límite, hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.
- Usando el resultado del inciso b) determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g en todos puntos de X ; en casi todos puntos de X .
- Para todo n en \mathbb{N} calcular $\|f_n - g\|_{\text{sup}} := \sup_{x \in X} |f_n(x) - g(x)|$.
- Determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g uniformemente.
- Para todos $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ calcular $A(\varepsilon, n)$. En los incisos f), h), i) es suficiente elegir algún $\varepsilon_0 > 0$ y calcular $A(\varepsilon, n)$ para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.
- Determinar si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g en medida μ .
- Para todos $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ calcular $B(\varepsilon, k)$.
- Para todo $\varepsilon > 0$ calcular $C(\varepsilon)$.
- Calcular D como la unión de los $C(\varepsilon)$. Hacer la conclusión.
- Utilizando el resultado del inciso h) determinar si tiene caso la convergencia casi uniforme, llamada también la convergencia de Egórov.
- Si el inciso k) tiene respuesta positiva, entonces para todo $\eta > 0$ construir un conjunto medible E con $\mu(E) < \eta$ tal que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converja a g uniformemente en $X \setminus E$.

Ejercicio 1. 55 %.

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}}$, $g(x) = 1$.

Ejercicio 2. 45 %.

$X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, $g(x) = 0$,

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{|x - n|}{n}\right) \cdot 1_{[0, 2n]}(x), \quad \text{esto es,} \quad f_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x - n|}{n}, & 0 \leq x \leq 2n; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$