Análisis Matemático III.
Segunda tarea.
Variante α.

Funciones de distribución, funciones de variación acotada, integrales impropias.

Ejercicio 1. *10 %.*
La función de distribución asociada a un vector. Sean $n = 6$, $\nu \in \mathbb{R}^n$,

$$\nu = \left[-3,\ -1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ 4,\ 5\right]^\top.$$

Definimos $\xi\colon \mathcal{B}_\mathbb{R} \to [0,1]$,

$$\xi(Y) := \frac{1}{n}\,\#\Big\{j \in \{1,\ldots,n\}\colon\ \nu_j \in Y\Big\}.$$

Definimos $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$F(x) := \xi\Big(\,]-\infty, x]\,\Big).$$

A. Calcule $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$. Explique los detalles.

B. Haga una gráfica de F. No es obligatorio explicarla. En el eje de ordenadas se recomienda marcar los números j/n, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Ejercicio 2. *10 %.*
La función de distribución asociada a una medida de probabilidad discreta. Sean $n = 4$, $\nu \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$,

$$\nu = [-3,\ -1,\ 2,\ 5]^\top, \qquad p = \left[\frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{8}\right]^\top.$$

Definimos $\xi\colon \mathcal{B}_\mathbb{R} \to [0,1]$,

$$\xi(Y) := \sum_{\substack{j\in\{1,\ldots,n\}\\ \nu_j\in Y}} p_j.$$

Definimos $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$F(x) := \xi\Big(\,]-\infty, x]\,\Big).$$

A. Calcule $F(-2)$, $F(-1)$, $F(1)$. Explique los detalles.

B. Haga una gráfica de F. No es obligatorio explicarla. En el eje de ordenadas marque los valores que toma F.

Ejercicio 3. *10 %.*
La función de distribución asociada a una función de densidad. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Definimos $\xi\colon \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0,1]$, $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$\xi(Y) := \int_Y f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad F(x) := \xi\Big(\,]-\infty, x]\, \Big).$$

A. Halle una fórmula explícita para $F(x)$.

B. Usando el resultado del inciso A, muestre que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

C. Haga una gráfica de F.

Ejercicio 4. *10 %.*
El límite de una función monótona. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $A :=]a, b[$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función creciente, $V := f[A]$, $u := \sup(V)$. Demuestre que

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x\in A}} f(x) = u.$$

Considere dos casos posibles: 1) $u \in \mathbb{R}$, 2) $u = +\infty$. Para cada uno de los dos casos, proponga un ejemplo de f y haga un dibujo, en el cual muestre algunas vecindades que surgen en la demostración.

Ejercicio 5. *5 %.*
El límite de una función monótona compuesta con una sucesión. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $A :=]a, b[$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función creciente, $V := f[A]$, $u := \sup(V)$. Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} t_n = b.$$

Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = u.$$

Considere dos casos posibles: 1) $u \in \mathbb{R}$, 2) $u = +\infty$.

Ejercicio 6. *8 %.*
Ejemplo de cálculo de la suma absoluta de incrementos de una función, asociada a una partición. Están dados un intervalo cerrado $[a, b]$, una función $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, una partición τ del intervalo $[a, b]$ y un punto c:

$$a = -2, \qquad b = 4, \qquad f(x) = |x + 1|, \qquad \tau = (-2,\ 0,\ 1,\ 4), \qquad c = -1.$$

A. Escriba la partición σ que se obtiene de τ al agregar el punto c.

B. Haga la gráfica de f y muestre en la gráfica los puntos $(x, f(x))$, donde x recorre σ.

C. Calcule $S_{\text{abs}}(f, \tau)$.

D. Calcule $S_{\text{abs}}(f, \sigma)$.

Ejercicio 7. *10 %.*
Está dado un intervalo cerrado $[a, b]$ y una función $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$:

$$a = -2, \qquad b = 4, \qquad f(x) = |x + 1|.$$

A. Haga una gráfica de f.

B. Determine si f es absolutamente continua (no se recomienda usar la definición).

C. Encuentre los intervalos de monotonía de f y calcule $\operatorname{Var}_a^b(f)$.

D. Calcule $\int_a^b |f'|$.

E. Sea τ la malla uniforme del intervalo $[a, b]$ que consiste de 100 partes (101 puntos, contanto los extremos). Calcule $S_{\text{abs}}(f, \tau)$ usando algún lenguaje de programación.

Ejercicio 8. *8 %.*
Propiedades de la variación. Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ y sea $c \in (a, b)$. Demuestre que

$$\operatorname{Var}_a^b(f) = \operatorname{Var}_a^c(f) + \operatorname{Var}_c^b(f).$$

Ejercicio 9. *3 %.*
Ejemplo de integral impropia con singularidad en un punto finito. Calcule la siguiente integral impropia usando la definición.

$$\int_{\to 2}^{5} \frac{dx}{\sqrt{x-2}}.$$

Ejercicio 10. *3 %.*
Ejemplo de integral impropia con singularidad en un punto finito. Calcule la siguiente integral impropia usando la definición.

$$\int_{1}^{\to 4} \frac{dx}{(4-x)^{3/2}}.$$

Ejercicio 11. *3 %.*
Ejemplo de integral impropia en un intervalo no acotado. Calcule la siguiente integral impropia usando la definición.

$$\int_{\to -\infty}^{2} \frac{dx}{(3-x)^{3/2}}.$$

Ejercicio 12. *3 %.*
Ejemplo de integral impropia en un intervalo no acotado. Calcule la siguiente integral impropia usando la definición.

$$\int_{-1}^{\to +\infty} \frac{dx}{(x+5)^{5/2}}.$$

Ejercicio 13. *15 %.*
Ejemplo de análisis de una integral de depende de un parámetro. Definimos $\Gamma\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$,

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt.$$

Demuestre que la integral converge para cada x en $(0,+\infty)$. Demuestre que la función Γ es continua.

Ejercicio 14. *5 %.*
Ejemplo de cálculo de integrales a través de la función Gamma o Beta. Calcule la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\, dx.$$

Análisis Matemático III.
Segunda tarea.
Variante β.

Funciones de distribución, funciones de variación acotada, integrales impropias.

Ejercicio 1. *10 %.*
La función de distribución asociada a un vector. Sean $n = 5$, $v \in \mathbb{R}^n$,

$$v = \left[-4,\ -\frac{3}{2},\ -1,\ 2,\ 3\right]^\top.$$

Definimos $\xi\colon \mathcal{B}_\mathbb{R} \to [0, 1]$,

$$\xi(Y) := \frac{1}{n}\,\#\Big\{j \in \{1, \ldots, n\}\colon\ v_j \in Y\Big\}.$$

Definimos $F\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$,

$$F(x) := \xi\Big(\,]-\infty, x]\,\Big).$$

A. Calcule $F(0)$, $F(2)$, $F(5/2)$. Explique los detalles.

B. Haga una gráfica de F. No es obligatorio explicarla. En el eje de ordenadas se recomienda marcar los números j/n, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Ejercicio 2. *10 %.*
La función de distribución asociada a una medida de probabilidad discreta. Sean $n = 5$, $v \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$,

$$v = [-2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 6]^\top, \qquad p = \left[\frac{1}{12},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{6}\right]^\top.$$

Definimos $\xi\colon \mathcal{B}_\mathbb{R} \to [0, 1]$,

$$\xi(Y) := \sum_{\substack{j \in \{1,\ldots,n\} \\ v_j \in Y}} p_j.$$

Definimos $F\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$,

$$F(x) := \xi\Big(\,]-\infty, x]\,\Big).$$

A. Calcule $F(2)$, $F(3)$, $F(7/4)$. Explique los detalles.

B. Haga una gráfica de F. No es obligatorio explicarla. En el eje de ordenadas marque los valores que toma F.

Ejercicio 3. *10 %.*
La función de distribución asociada a una función de densidad. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)\, 3\,\mathrm{e}^{-3t} = \begin{cases} 3\,\mathrm{e}^{-3t}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Definimos $\xi\colon \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0,1]$, $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$\xi(Y) \coloneqq \int_Y f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad F(x) \coloneqq \xi\Big(\,]-\infty, x]\,\Big).$$

A. Halle una fórmula explícita para $F(x)$.

B. Usando el resultado del inciso A, muestre que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

C. Haga una gráfica de F.

Ejercicio 4. *10 %.*
El límite de una función monótona. Sean $a \in \mathbb{R}$, $b = +\infty$, $A \coloneqq]a,b[$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función creciente, $V \coloneqq f[A]$, $u \coloneqq \sup(V)$. Demuestre que

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x\in A}} f(x) = u.$$

Considere dos casos posibles: 1) $u \in \mathbb{R}$, 2) $u = +\infty$. Para cada uno de los dos casos, proponga un ejemplo de f y haga un dibujo, en el cual muestre algunas vecindades que surgen en la demostración.

Ejercicio 5. *5 %.*
El límite de una función monótona compuesta con una sucesión. Sean $a \in \mathbb{R}$, $b = +\infty$, $A \coloneqq]a,b[$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función creciente, $V \coloneqq f[A]$, $u \coloneqq \sup(V)$. Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} t_n = b.$$

Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = u.$$

Considere dos casos posibles: 1) $u \in \mathbb{R}$, 2) $u = +\infty$.

Ejercicio 6. *8 %.*
Ejemplo de cálculo de la suma absoluta de incrementos de una función, asociada a una partición. Están dados un intervalo cerrado $[a, b]$, una función $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, una partición τ del intervalo $[a, b]$ y un punto c:

$$a = -\pi, \qquad b = \pi, \qquad f(x) = \operatorname{sen}(2x), \qquad \tau = \left(-\pi,\ -\frac{\pi}{4},\ 0,\ \frac{3\pi}{4},\ \pi\right), \qquad c = \frac{\pi}{4}.$$

A. Escriba la partición σ que se obtiene de τ al agregar el punto c.

B. Haga la gráfica de f y muestre en la gráfica los puntos $(x, f(x))$, donde x recorre σ.

C. Calcule $S_{\text{abs}}(f, \tau)$.

D. Calcule $S_{\text{abs}}(f, \sigma)$.

Ejercicio 7. *10 %.*
Está dado un intervalo cerrado $[a, b]$ y una función $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$:

$$a = -\pi, \qquad b = \pi, \qquad f(x) = \operatorname{sen}(2x).$$

A. Haga una gráfica de f.

B. Determine si f es absolutamente continua (no se recomienda usar la definición).

C. Encuentre los intervalos de monotonía de f y calcule $\operatorname{Var}_a^b(f)$.

D. Calcule $\int_a^b |f'|$.

E. Sea τ la malla uniforme del intervalo $[a, b]$ que consiste de 100 partes (101 puntos, contanto los extremos). Calcule $S_{\text{abs}}(f, \tau)$ usando algún lenguaje de programación.

Ejercicio 8. *8 %.*
Propiedades de la variación. Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ y sea $c \in (a, b)$. Demuestre que

$$\operatorname{Var}_a^b(f) = \operatorname{Var}_a^c(f) + \operatorname{Var}_c^b(f).$$

Ejercicio 9. *3 %.*
Ejemplo de integral impropia con singularidad en un punto finito. Calcule la siguiente integral impropia usando la definición.

$$\int_{-1}^{\to 5} \frac{dx}{\sqrt[3]{5-x}}.$$

Ejercicio 10. *3 %.*
Ejemplo de integral impropia con singularidad en un punto finito. Calcule la siguiente integral impropia usando la definición.

$$\int_{\to -2}^{3} \frac{dx}{x+2}.$$

Ejercicio 11. *3 %.*
Ejemplo de integral impropia en un intervalo no acotado. Calcule la siguiente integral impropia usando la definición.

$$\int_{-1}^{\to +\infty} \frac{dx}{(x+5)^{5/2}}.$$

Ejercicio 12. *3 %.*
Ejemplo de integral impropia en un intervalo no acotado. Calcule la siguiente integral impropia usando la definición.

$$\int_{\to -\infty}^{2} \frac{dx}{(3-x)^{3/2}}.$$

Ejercicio 13. *15 %.*
Ejemplo de análisis de una integral de depende de un parámetro. Definimos $\Gamma\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt.$$

Demuestre que la integral converge para cada x en $(0, +\infty)$. Demuestre que la función Γ es continua.

Ejercicio 14. *5 %.*
Ejemplo de cálculo de integrales a través de la función Gamma o Beta. Calcule la integral

$$\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\, dx.$$

Análisis Matemático III.
Segunda tarea.
Variante 0.

Funciones de distribución, funciones de variación acotada, integrales impropias.

Ejercicio 1. *10 %.*
La función de distribución asociada a un vector. Sean $n = 7$, $v \in \mathbb{R}^n$,

$$v = \left[-3,\ -\frac{5}{2},\ -1,\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ 4\right]^\top.$$

Definimos $\xi\colon \mathcal{B}_\mathbb{R} \to [0,1]$,

$$\xi(Y) := \frac{1}{n}\,\#\Big\{j \in \{1,\ldots,n\}\colon\ v_j \in Y\Big\}.$$

Definimos $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$F(x) := \xi\Big(\,]-\infty, x]\,\Big).$$

A. Calcule $F(7/4)$, $F(2)$, $F(3)$. Explique los detalles.

B. Haga una gráfica de F. No es obligatorio explicarla. En el eje de ordenadas se recomienda marcar los números j/n, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Ejercicio 2. *10 %.*
La función de distribución asociada a una medida de probabilidad discreta. Sean $n = 4$, $v \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$,

$$v = [-3,\ -2,\ 0,\ 2]^\top, \qquad p = \left[\frac{1}{6},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4}\right]^\top.$$

Definimos $\xi\colon \mathcal{B}_\mathbb{R} \to [0,1]$,

$$\xi(Y) := \sum_{\substack{j\in\{1,\ldots,n\}\\ v_j\in Y}} p_j.$$

Definimos $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$F(x) := \xi\Big(\,]-\infty, x]\,\Big).$$

A. Calcule $F(-2)$, $F(-1)$, $F(1)$. Explique los detalles.

B. Haga una gráfica de F. No es obligatorio explicarla. En el eje de ordenadas marque los valores que toma F.

Ejercicio 3. *10 %.*
La función de distribución asociada a una función de densidad. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = \frac{1}{4\cosh^2 \frac{t}{2}}.$$

Definimos $\xi\colon \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0,1]$, $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$\xi(Y) := \int_Y f(t)\,dt, \qquad F(x) := \xi\Big(\,]-\infty, x]\,\Big).$$

A. Halle una fórmula explícita para $F(x)$.

B. Usando el resultado del inciso A, muestre que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

C. Haga una gráfica de F.

Ejercicio 4. *10 %.*
El límite de una función monótona. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $A :=]a, b[$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función creciente, $V := f[A]$, $u := \inf(V)$. Demuestre que

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = u.$$

Considere dos casos posibles: 1) $u \in \mathbb{R}$, 2) $u = -\infty$. Para cada uno de los dos casos, proponga un ejemplo de f y haga un dibujo, en el cual muestre algunas vecindades que surgen en la demostración.

Ejercicio 5. *5 %.*
El límite de una función monótona compuesta con una sucesión. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $A :=]a, b[$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función creciente, $V := f[A]$, $u := \inf(V)$. Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} t_n = a.$$

Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = u.$$

Considere dos casos posibles: 1) $u \in \mathbb{R}$, 2) $u = -\infty$.

Ejercicio 6. *8 %.*
Ejemplo de cálculo de la suma absoluta de incrementos de una función, asociada a una partición. Están dados un intervalo cerrado $[a, b]$, una función $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, una partición τ del intervalo $[a, b]$ y un punto c:

$$a = -\pi, \qquad b = \pi, \qquad f(x) = \cos(2x), \qquad \tau = \left(-\pi,\ -\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \pi\right), \qquad c = -\frac{\pi}{6}.$$

A. Escriba la partición σ que se obtiene de τ al agregar el punto c.

B. Haga la gráfica de f y muestre en la gráfica los puntos $(x, f(x))$, donde x recorre σ.

C. Calcule $S_{\mathrm{abs}}(f, \tau)$.

D. Calcule $S_{\mathrm{abs}}(f, \sigma)$.

Ejercicio 7. *10 %.*
Está dado un intervalo cerrado $[a, b]$ y una función $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$:

$$a = -\pi, \qquad b = \pi, \qquad f(x) = \cos(2x).$$

A. Haga una gráfica de f.

B. Determine si f es absolutamente continua (no se recomienda usar la definición).

C. Encuentre los intervalos de monotonía de f y calcule $\mathrm{Var}_a^b(f)$.

D. Calcule $\int_a^b |f'|$.

E. Sea τ la malla uniforme del intervalo $[a, b]$ que consiste de 100 partes (101 puntos, contanto los extremos). Calcule $S_{\mathrm{abs}}(f, \tau)$ usando algún lenguaje de programación.

Ejercicio 8. *8 %.*
Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ una función de variación acotada. Definimos $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) \coloneqq \mathrm{Var}_a^x(f).$$

Sea $c \in (a, b)$ tal que f y g son derivables en c. Demuestre que

$$|f'(c)| \leqslant g'(c).$$

Ejercicio 9. *3 %.*
Ejemplo de integral impropia con singularidad en un punto finito. Calcule la siguiente integral impropia usando la definición.

$$\int_{\to -1}^{3} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+1}}.$$

Ejercicio 10. *3 %.*
Ejemplo de integral impropia con singularidad en un punto finito. Calcule la siguiente integral impropia usando la definición.

$$\int_{1}^{\to 3} \frac{dx}{(x-3)^2}.$$

Ejercicio 11. *3 %.*
Ejemplo de integral impropia en un intervalo no acotado. Calcule la siguiente integral impropia usando la definición.

$$\int_{\to -\infty}^{1} \frac{dx}{(5-x)^{3/2}}.$$

Ejercicio 12. *3 %.*
Ejemplo de integral impropia en un intervalo no acotado. Calcule la siguiente integral impropia usando la definición.

$$\int_{-1}^{\to +\infty} \frac{dx}{x+2}.$$

Ejercicio 13. *15 %.*
Ejemplo de análisis de una integral de depende de un parámetro. Para cada x en $\mathbb{R}$, definimos

$$f(x) := \left(\int_0^x e^{-t^2}\, dt \right)^2, \qquad g(x) := \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\, dt.$$

Demuestre que para cada x en $\mathbb{R}$, se cumple la igualdad

$$f'(x) + g'(x) = 0.$$

Deduzca que

$$f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}.$$

Utilice este resultado para calcular la integral de Poisson:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ejercicio 14. *5 %.*
Ejemplo de cálculo de integrales a través de la función Gamma o Beta. Calcule la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x)^3}\, dx.$$

Análisis Matemático III.
Segunda tarea.
Variante 1.

Funciones de distribución, funciones de variación acotada, integrales impropias.

Ejercicio 1. *10 %.*
La función de distribución asociada a un vector. Sean $n = 6$, $v \in \mathbb{R}^n$,

$$v = \left[-5,\ -4,\ -1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 3\right]^\top.$$

Definimos $\xi\colon \mathcal{B}_\mathbb{R} \to [0, 1]$,

$$\xi(Y) := \frac{1}{n}\,\#\Big\{j \in \{1, \ldots, n\}\colon\ v_j \in Y\Big\}.$$

Definimos $F\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$,

$$F(x) := \xi\Big(\,]-\infty, x]\,\Big).$$

A. Calcule $F(-3)$, $F(-1)$, $F(-1/2)$. Explique los detalles.

B. Haga una gráfica de F. No es obligatorio explicarla. En el eje de ordenadas se recomienda marcar los números j/n, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Ejercicio 2. *10 %.*
La función de distribución asociada a una medida de probabilidad discreta. Sean $n = 5$, $v \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$,

$$v = [-2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 4]^\top, \qquad p = \left[\frac{1}{8},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{3}{8},\ \frac{1}{6}\right]^\top.$$

Definimos $\xi\colon \mathcal{B}_\mathbb{R} \to [0, 1]$,

$$\xi(Y) := \sum_{\substack{j\in\{1,\ldots,n\}\\ v_j\in Y}} p_j.$$

Definimos $F\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$,

$$F(x) := \xi\Big(\,]-\infty, x]\,\Big).$$

A. Calcule $F(-2)$, $F(-1)$, $F(1)$. Explique los detalles.

B. Haga una gráfica de F. No es obligatorio explicarla. En el eje de ordenadas marque los valores que toma F.

Ejercicio 3. *10 %.*
La función de distribución asociada a una función de densidad. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}.$$

Definimos $\xi\colon \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0,1]$, $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$\xi(Y) := \int_Y f(t)\,dt, \qquad F(x) := \xi\Big(\,]-\infty, x]\,\Big).$$

A. Halle una fórmula explícita para $F(x)$.

B. Usando el resultado del inciso A, muestre que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

C. Haga una gráfica de F.

Ejercicio 4. *10 %.*
El límite de una función monótona. Sean $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$, $A :=]a,b[$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función creciente, $V := f[A]$, $u := \inf(V)$. Demuestre que

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = u.$$

Considere dos casos posibles: 1) $u \in \mathbb{R}$, 2) $u = -\infty$. Para cada uno de los dos casos, proponga un ejemplo de f y haga un dibujo, en el cual muestre algunas vecindades que surgen en la demostración.

Ejercicio 5. *5 %.*
El límite de una función monótona compuesta con una sucesión. Sean $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$, $A :=]a,b[$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función creciente, $V := f[A]$, $u := \inf(V)$. Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} t_n = a.$$

Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = u.$$

Considere dos casos posibles: 1) $u \in \mathbb{R}$, 2) $u = -\infty$.

Ejercicio 6. *8 %.*
Ejemplo de cálculo de la suma absoluta de incrementos de una función, asociada a una partición. Están dados un intervalo cerrado $[a, b]$, una función $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, una partición τ del intervalo $[a, b]$ y un punto c:

$$a = -3, \qquad b = 3, \qquad f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x, \qquad \tau = (-3,\ -2,\ 1,\ 3)\,, \qquad c = -1.$$

A. Escriba la partición σ que se obtiene de τ al agregar el punto c.

B. Haga la gráfica de f y muestre en la gráfica los puntos $(x, f(x))$, donde x recorre σ.

C. Calcule $S_{\text{abs}}(f, \tau)$.

D. Calcule $S_{\text{abs}}(f, \sigma)$.

Ejercicio 7. *10 %.*
Está dado un intervalo cerrado $[a, b]$ y una función $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$:

$$a = -3, \qquad b = 3, \qquad f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x.$$

A. Haga una gráfica de f.

B. Determine si f es absolutamente continua (no se recomienda usar la definición).

C. Encuentre los intervalos de monotonía de f y calcule $\operatorname{Var}_a^b(f)$.

D. Calcule $\int_a^b |f'|$.

E. Sea τ la malla uniforme del intervalo $[a, b]$ que consiste de 100 partes (101 puntos, contanto los extremos). Calcule $S_{\text{abs}}(f, \tau)$ usando algún lenguaje de programación.

Ejercicio 8. *8 %.*
Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada. Definimos $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) \coloneqq \operatorname{PVar}_a^x(f).$$

Sea $c \in (a, b)$ tal que f y g son derivables en c. Demuestre que

$$\mathrm{P}(f'(c)) \leqslant g'(c),$$

donde P es la parte positiva.

Ejercicio 9. *3 %.*
Ejemplo de integral impropia con singularidad en un punto finito. Calcule la siguiente integral impropia usando la definición.

$$\int_0^{\to 4} \frac{dx}{\sqrt{4-x}}.$$

Ejercicio 10. *3 %.*
Ejemplo de integral impropia con singularidad en un punto finito. Calcule la siguiente integral impropia usando la definición.

$$\int_{\to -2}^{6} \frac{dx}{(x+2)^4}.$$

Ejercicio 11. *3 %.*
Ejemplo de integral impropia en un intervalo no acotado. Calcule la siguiente integral impropia usando la definición.

$$\int_{-1}^{\to +\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^3}}.$$

Ejercicio 12. *3 %.*
Ejemplo de integral impropia en un intervalo no acotado. Calcule la siguiente integral impropia usando la definición.

$$\int_{\to -\infty}^{-2} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}.$$

Ejercicio 13. *15 %.*
Ejemplo de análisis de una integral de depende de un parámetro. Calcule la siguiente integral usando la derivación respecto al parámetro:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\alpha x^2}}{x^2}\, dx.$$

Definimos $f\colon [0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ y $g\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x, \alpha) := \frac{1 - e^{-\alpha x^2}}{x^2}, \qquad g(\alpha) := \int_0^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx.$$

Demuestre que $g \in C([0, +\infty), \mathbb{R})$.
Demuestre que se puede aplicar la regla de Leibniz para $\alpha > 0$.
Calcule $g'(\alpha)$ para $\alpha > 0$. Calcule $g(0)$. Calcule $g(\alpha)$.

Ejercicio 14. *5 %.*
Ejemplo de cálculo de integrales a través de la función Gamma o Beta. Calcule la integral

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x - x^2}\, dx.$$

Análisis Matemático III.
Segunda tarea.
Variante 2.

Funciones de distribución, funciones de variación acotada, integrales impropias.

Ejercicio 1. *10 %.*
La función de distribución asociada a un vector. Sean $n = 7$, $v \in \mathbb{R}^n$,

$$v = \left[-4,\ -3,\ -\frac{5}{2},\ -2,\ 1,\ 3,\ 4\right]^\top.$$

Definimos $\xi\colon \mathcal{B}_\mathbb{R} \to [0,1]$,

$$\xi(Y) := \frac{1}{n}\,\#\Big\{j \in \{1,\ldots,n\}\colon\ v_j \in Y\Big\}.$$

Definimos $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$F(x) := \xi\Big(\,]-\infty, x]\,\Big).$$

A. Calcule $F(2)$, $F(3)$, $F(7/2)$. Explique los detalles.

B. Haga una gráfica de F. No es obligatorio explicarla. En el eje de ordenadas se recomienda marcar los números j/n, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Ejercicio 2. *10 %.*
La función de distribución asociada a una medida de probabilidad discreta. Sean $n = 4$, $v \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$,

$$v = [-4,\ -3,\ 1,\ 2]^\top, \qquad p = \left[\frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4}\right]^\top.$$

Definimos $\xi\colon \mathcal{B}_\mathbb{R} \to [0,1]$,

$$\xi(Y) := \sum_{\substack{j\in\{1,\ldots,n\}\\ v_j\in Y}} p_j.$$

Definimos $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$F(x) := \xi\Big(\,]-\infty, x]\,\Big).$$

A. Calcule $F(0)$, $F(1)$, $F(3/2)$. Explique los detalles.

B. Haga una gráfica de F. No es obligatorio explicarla. En el eje de ordenadas marque los valores que toma F.

Ejercicio 3. *10 %.*
La función de distribución asociada a una función de densidad. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(t)\,\frac{2}{\pi}\sqrt{1-t^2} = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-t^2}, & |t| \leqslant 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

Definimos $\xi\colon \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0,1]$, $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$\xi(Y) := \int_Y f(t)\,dt, \qquad F(x) := \xi\Big(\,]-\infty, x]\,\Big).$$

A. Halle una fórmula explícita para $F(x)$.

B. Usando el resultado del inciso A, muestre que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

C. Haga una gráfica de F.

Ejercicio 4. *10 %.*
El límite de una función monótona. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $A :=]a,b[$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función decreciente, $V := f[A]$, $u := \inf(V)$. Demuestre que

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x\in A}} f(x) = u.$$

Considere dos casos posibles: 1) $u \in \mathbb{R}$, 2) $u = -\infty$. Para cada uno de los dos casos, proponga un ejemplo de f y haga un dibujo, en el cual muestre algunas vecindades que surgen en la demostración.

Ejercicio 5. *5 %.*
El límite de una función monótona compuesta con una sucesión. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $A :=]a,b[$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función decreciente, $V := f[A]$, $u := \inf(V)$. Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} t_n = b.$$

Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = u.$$

Considere dos casos posibles: 1) $u \in \mathbb{R}$, 2) $u = -\infty$.

Ejercicio 6. *8 %.*
Ejemplo de cálculo de la suma absoluta de incrementos de una función, asociada a una partición. Están dados un intervalo cerrado $[a, b]$, una función $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, una partición τ del intervalo $[a, b]$ y un punto c:

$$a = -\pi, \qquad b = \pi, \qquad f(x) = \operatorname{sen}(3x) + 1, \qquad \tau = \left(-\pi,\ -\frac{\pi}{2},\ 0,\ \frac{2\pi}{3},\ \pi\right), \qquad c = -\frac{\pi}{6}.$$

A. Escriba la partición σ que se obtiene de τ al agregar el punto c.

B. Haga la gráfica de f y muestre en la gráfica los puntos $(x, f(x))$, donde x recorre σ.

C. Calcule $S_{\mathrm{abs}}(f, \tau)$.

D. Calcule $S_{\mathrm{abs}}(f, \sigma)$.

Ejercicio 7. *10 %.*
Está dado un intervalo cerrado $[a, b]$ y una función $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$:

$$a = -\pi, \qquad b = \pi, \qquad f(x) = \operatorname{sen}(3x) + 1.$$

A. Haga una gráfica de f.

B. Determine si f es absolutamente continua (no se recomienda usar la definición).

C. Encuentre los intervalos de monotonía de f y calcule $\operatorname{Var}_a^b(f)$.

D. Calcule $\int_a^b |f'|$.

E. Sea τ la malla uniforme del intervalo $[a, b]$ que consiste de 100 partes (101 puntos, contanto los extremos). Calcule $S_{\mathrm{abs}}(f, \tau)$ usando algún lenguaje de programación.

Ejercicio 8. *8 %.*
Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada. Definimos $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) \coloneqq \operatorname{NVar}_a^x(f).$$

Sea $c \in (a, b)$ tal que f y g son derivables en c. Demuestre que

$$\mathrm{N}(f'(c)) \leqslant g'(c),$$

donde N es la parte negativa.

Ejercicio 9. *3 %.*
Ejemplo de integral impropia con singularidad en un punto finito. Calcule la siguiente integral impropia usando la definición.

$$\int_{\to 1}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

Ejercicio 10. *3 %.*
Ejemplo de integral impropia con singularidad en un punto finito. Calcule la siguiente integral impropia usando la definición.

$$\int_{1}^{\to 3} \frac{dx}{(3-x)^{3/2}}.$$

Ejercicio 11. *3 %.*
Ejemplo de integral impropia en un intervalo no acotado. Calcule la siguiente integral impropia usando la definición.

$$\int_{\to -\infty}^{-2} \frac{dx}{(4-x)^{3/2}}.$$

Ejercicio 12. *3 %.*
Ejemplo de integral impropia en un intervalo no acotado. Calcule la siguiente integral impropia usando la definición.

$$\int_{-1}^{\to +\infty} \frac{dx}{(x+2)^{2/3}}.$$

Ejercicio 13. *15 %.*
Ejemplo de análisis de una integral de depende de un parámetro. Definimos $\Phi\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(b) := \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(bx)\, dx.$$

Demuestre que la integral existe en el sentido de Lebesgue. Demuestre que se puede aplicar la regla de Leibniz para la derivación de la integral respecto al parámetro. Establezca la relación

$$\Phi'(b) = -\frac{b}{2}\Phi(b).$$

Demuestre que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(bx)\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{b^2}{4}}.$$

Ejercicio 14. *5 %.*
Ejemplo de cálculo de integrales a través de la función Gamma o Beta. Calcule la integral

$$\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^2 (\cos x)^4\, dx.$$

Análisis Matemático III.
Segunda tarea.
Variante 3.

Funciones de distribución, funciones de variación acotada, integrales impropias.

Ejercicio 1. *10 %.*
La función de distribución asociada a un vector. Sean $n = 6$, $v \in \mathbb{R}^n$,

$$v = \left[-2,\ -1,\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ 4\right]^\top.$$

Definimos $\xi\colon \mathcal{B}_\mathbb{R} \to [0,1]$,

$$\xi(Y) := \frac{1}{n}\,\#\Big\{j \in \{1,\ldots,n\}\colon\ v_j \in Y\Big\}.$$

Definimos $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$F(x) := \xi\Big(\,]-\infty, x]\,\Big).$$

A. Calcule $F(7/4)$, $F(2)$, $F(3)$. Explique los detalles.

B. Haga una gráfica de F. No es obligatorio explicarla. En el eje de ordenadas se recomienda marcar los números j/n, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Ejercicio 2. *10 %.*
La función de distribución asociada a una medida de probabilidad discreta. Sean $n = 5$, $v \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$,

$$v = [-4,\ -3,\ -2,\ 1,\ 4]^\top, \qquad p = \left[\frac{1}{8},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{3}{8},\ \frac{1}{6}\right]^\top.$$

Definimos $\xi\colon \mathcal{B}_\mathbb{R} \to [0,1]$,

$$\xi(Y) := \sum_{\substack{j\in\{1,\ldots,n\}\\ v_j\in Y}} p_j.$$

Definimos $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$F(x) := \xi\Big(\,]-\infty, x]\,\Big).$$

A. Calcule $F(0)$, $F(1)$, $F(2)$. Explique los detalles.

B. Haga una gráfica de F. No es obligatorio explicarla. En el eje de ordenadas marque los valores que toma F.

Ejercicio 3. *10 %.*
La función de distribución asociada a una función de densidad. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t < 1, \\ 2 - t, & 1 \leqslant t \leqslant 2, \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus [0, 2]. \end{cases}$$

Definimos $\xi\colon \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0, 1]$, $F\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$,

$$\xi(Y) := \int_Y f(t)\,dt, \qquad F(x) := \xi\Big(\,]-\infty, x]\,\Big).$$

A. Halle una fórmula explícita para $F(x)$.

B. Usando el resultado del inciso A, muestre que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

C. Haga una gráfica de F.

Ejercicio 4. *10 %.*
El límite de una función monótona. Sean $a \in \mathbb{R}$, $b = +\infty$, $A :=]a, b[$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función decreciente, $V := f[A]$, $u := \inf(V)$. Demuestre que

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x \in A}} f(x) = u.$$

Considere dos casos posibles: 1) $u \in \mathbb{R}$, 2) $u = -\infty$. Para cada uno de los dos casos, proponga un ejemplo de f y haga un dibujo, en el cual muestre algunas vecindades que surgen en la demostración.

Ejercicio 5. *5 %.*
El límite de una función monótona compuesta con una sucesión. Sean $a \in \mathbb{R}$, $b = +\infty$, $A :=]a, b[$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función decreciente, $V := f[A]$, $u := \inf(V)$. Sea $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} t_n = b.$$

Demuestre que

$$\lim_{n \to \infty} f(t_n) = u.$$

Considere dos casos posibles: 1) $u \in \mathbb{R}$, 2) $u = -\infty$.

Ejercicio 6. *8 %.*
Ejemplo de cálculo de la suma absoluta de incrementos de una función, asociada a una partición. Están dados un intervalo cerrado $[a, b]$, una función $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, una partición τ del intervalo $[a, b]$ y un punto c:

$$a = -4, \qquad b = 3, \qquad f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x, \qquad \tau = (-4,\ -1,\ 2, 3), \qquad c = -2.$$

A. Escriba la partición σ que se obtiene de τ al agregar el punto c.

B. Haga la gráfica de f y muestre en la gráfica los puntos $(x, f(x))$, donde x recorre σ.

C. Calcule $S_{\text{abs}}(f, \tau)$.

D. Calcule $S_{\text{abs}}(f, \sigma)$.

Ejercicio 7. *10 %.*
Está dado un intervalo cerrado $[a, b]$ y una función $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$:

$$a = -4, \qquad b = 3, \qquad f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x.$$

A. Haga una gráfica de f.

B. Determine si f es absolutamente continua (no se recomienda usar la definición).

C. Encuentre los intervalos de monotonía de f y calcule $\operatorname{Var}_a^b(f)$.

D. Calcule $\int_a^b |f'|$.

E. Sea τ la malla uniforme del intervalo $[a, b]$ que consiste de 100 partes (101 puntos, contanto los extremos). Calcule $S_{\text{abs}}(f, \tau)$ usando algún lenguaje de programación.

Ejercicio 8. *8 %.*
Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ una función absolutamente continua. Demuestre que

$$\operatorname{Var}_a^b(f) \leqslant \int_{[a,b]} |f'(t)|\, d\mu(t).$$

La desigualdad recíproca también se cumple, pero no la estamos demostrando en este ejercicio.

Ejercicio 9. *3 %.*
Ejemplo de integral impropia con singularidad en un punto finito. Calcule la siguiente integral impropia usando la definición.

$$\int_{2}^{\to 5} \frac{dx}{\sqrt[3]{5-x}}.$$

Ejercicio 10. *3 %.*
Ejemplo de integral impropia con singularidad en un punto finito. Calcule la siguiente integral impropia usando la definición.

$$\int_{\to 1}^{5} \frac{dx}{(x-1)^{5/4}}.$$

Ejercicio 11. *3 %.*
Ejemplo de integral impropia en un intervalo no acotado. Calcule la siguiente integral impropia usando la definición.

$$\int_{4}^{\to +\infty} \frac{dx}{(x-1)^{5/3}}.$$

Ejercicio 12. *3 %.*
Ejemplo de integral impropia en un intervalo no acotado. Calcule la siguiente integral impropia usando la definición.

$$\int_{\to -\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{3-x}}.$$

Ejercicio 13. *15 %.*
Ejemplo de análisis de una integral de depende de un parámetro. Para cada x en $\mathbb{R}$, definimos

$$f(x) := \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt \right)^2, \qquad g(x) := \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\,dt.$$

Demuestre que para cada x en $\mathbb{R}$, se cumple la igualdad

$$f'(x) + g'(x) = 0.$$

Deduzca que

$$f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}.$$

Utilice este resultado para calcular la integral de Poisson:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ejercicio 14. *5 %.*
Ejemplo de cálculo de integrales a través de la función Gamma o Beta. Calcule la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{(1+x)^3}\,dx.$$

Análisis Matemático III.
Segunda tarea.
Variante 4.

Funciones de distribución, funciones de variación acotada, integrales impropias.

Ejercicio 1. *10 %.*
La función de distribución asociada a un vector. Sean $n = 7$, $v \in \mathbb{R}^n$,

$$v = \left[-3, \ -1, \ 0, \ 2, \ \frac{5}{2}, \ 3, \ 5 \right]^\top.$$

Definimos $\xi\colon \mathcal{B}_\mathbb{R} \to [0,1]$,

$$\xi(Y) := \frac{1}{n} \# \Big\{ j \in \{1,\ldots,n\} \colon \ v_j \in Y \Big\}.$$

Definimos $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$F(x) := \xi\Big( ]-\infty, x] \Big).$$

A. Calcule $F(1)$, $F(2)$, $F(7/4)$. Explique los detalles.

B. Haga una gráfica de F. No es obligatorio explicarla. En el eje de ordenadas se recomienda marcar los números j/n, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Ejercicio 2. *10 %.*
La función de distribución asociada a una medida de probabilidad discreta. Sean $n = 4$, $v \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$,

$$v = [-5, \ -1, \ 0, \ 2]^\top, \qquad p = \left[\frac{1}{12}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{12}, \ \frac{1}{3} \right]^\top.$$

Definimos $\xi\colon \mathcal{B}_\mathbb{R} \to [0,1]$,

$$\xi(Y) := \sum_{\substack{j \in \{1,\ldots,n\} \\ v_j \in Y}} p_j.$$

Definimos $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$F(x) := \xi\Big( ]-\infty, x] \Big).$$

A. Calcule $F(-1/2)$, $F(0)$, $F(1)$. Explique los detalles.

B. Haga una gráfica de F. No es obligatorio explicarla. En el eje de ordenadas marque los valores que toma F.

Ejercicio 3. *10 %.*
La función de distribución asociada a una función de densidad. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}, & 0 < t < 1, \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus]0,1[\,. \end{cases}$$

Definimos $\xi\colon \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0,1]$, $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$\xi(Y) := \int_Y f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad F(x) := \xi\Big(\,]-\infty, x]\,\Big).$$

A. Halle una fórmula explícita para $F(x)$.

B. Usando el resultado del inciso A, muestre que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

C. Haga una gráfica de F.

Ejercicio 4. *10 %.*
El límite de una función monótona. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $A :=]a,b[\,$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función decreciente, $V := f[A]$, $u := \sup(V)$. Demuestre que

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = u.$$

Considere dos casos posibles: 1) $u \in \mathbb{R}$, 2) $u = +\infty$. Para cada uno de los dos casos, proponga un ejemplo de f y haga un dibujo, en el cual muestre algunas vecindades que surgen en la demostración.

Ejercicio 5. *5 %.*
El límite de una función monótona compuesta con una sucesión. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $A :=]a,b[\,$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función decreciente, $V := f[A]$, $u := \sup(V)$. Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} t_n = a.$$

Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = u.$$

Considere dos casos posibles: 1) $u \in \mathbb{R}$, 2) $u = +\infty$.

Ejercicio 6. *8 %.*
Ejemplo de cálculo de la suma absoluta de incrementos de una función, asociada a una partición. Están dados un intervalo cerrado $[a, b]$, una función $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, una partición τ del intervalo $[a, b]$ y un punto c:

$$a = -\pi, \qquad b = \frac{\pi}{2}, \qquad f(x) = \cos(2x), \qquad \tau = \left(-\pi,\ -\frac{\pi}{6},\ 0,\ \frac{\pi}{2}\right), \qquad c = -\frac{\pi}{3}.$$

A. Escriba la partición σ que se obtiene de τ al agregar el punto c.

B. Haga la gráfica de f y muestre en la gráfica los puntos $(x, f(x))$, donde x recorre σ.

C. Calcule $S_{\text{abs}}(f, \tau)$.

D. Calcule $S_{\text{abs}}(f, \sigma)$.

Ejercicio 7. *10 %.*
Está dado un intervalo cerrado $[a, b]$ y una función $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$:

$$a = -\pi, \qquad b = \frac{\pi}{2}, \qquad f(x) = \cos(2x).$$

A. Haga una gráfica de f.

B. Determine si f es absolutamente continua (no se recomienda usar la definición).

C. Encuentre los intervalos de monotonía de f y calcule $\operatorname{Var}_a^b(f)$.

D. Calcule $\int_a^b |f'|$.

E. Sea τ la malla uniforme del intervalo $[a, b]$ que consiste de 100 partes (101 puntos, contanto los extremos). Calcule $S_{\text{abs}}(f, \tau)$ usando algún lenguaje de programación.

Ejercicio 8. *8 %.*
Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función absolutamente continua. Demuestre que

$$\operatorname{PVar}_a^b(f) \leqslant \int_{[a,b]} P(f'(t))\, d\mu(t),$$

donde P es la parte positiva. La desigualdad recíproca también se cumple, pero no la estamos demostrando en este ejercicio.

Ejercicio 9. *3 %.*
Ejemplo de integral impropia con singularidad en un punto finito. Calcule la siguiente integral impropia usando la definición.

$$\int_{\to -3}^{4} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+3}}.$$

Ejercicio 10. *3 %.*
Ejemplo de integral impropia con singularidad en un punto finito. Calcule la siguiente integral impropia usando la definición.

$$\int_{-4}^{\to -2} \frac{dx}{(-2-x)^{4/3}}.$$

Ejercicio 11. *3 %.*
Ejemplo de integral impropia en un intervalo no acotado. Calcule la siguiente integral impropia usando la definición.

$$\int_{\to -\infty}^{-1} \frac{dx}{(2-x)^3}.$$

Ejercicio 12. *3 %.*
Ejemplo de integral impropia en un intervalo no acotado. Calcule la siguiente integral impropia usando la definición.

$$\int_{-2}^{\to +\infty} \frac{dx}{x+5}.$$

Ejercicio 13. *15 %.*
Ejemplo de análisis de una integral de depende de un parámetro. Calcule la siguiente integral usando la derivación respecto al parámetro:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\alpha x^2}}{x^2}\, dx.$$

Definimos $f\colon [0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ y $g\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x, \alpha) := \frac{1 - e^{-\alpha x^2}}{x^2}, \qquad g(\alpha) := \int_0^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx.$$

Demuestre que $g \in C([0, +\infty), \mathbb{R})$.
Demuestre que se puede aplicar la regla de Leibniz para $\alpha > 0$.
Calcule $g'(\alpha)$ para $\alpha > 0$. Calcule $g(0)$. Calcule $g(\alpha)$.

Ejercicio 14. *5 %.*
Ejemplo de cálculo de integrales a través de la función Gamma o Beta. Calcule la integral

$$\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^6 (\cos x)^4\, dx.$$