Desigualdades con supremos o ínfimos (un tema de “Análisis Real”)

Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

4 de marzo de 2021

Objetivo:

establecer criterios para las desigualdades de la forma

$$\sup(A) \le b, \qquad \sup(A) > b, \qquad \inf(A) \ge b, \qquad \inf(A) < b,$$

$$\sup(A) < b, \qquad \sup(A) \ge b, \qquad \inf(A) > b, \qquad \inf(A) \le b.$$

Prerrequisitos:

el eje real extendido $\overline{\mathbb{R}}$,

cotas superiores e inferiores (para subconjuntos de $\overline{\mathbb{R}}$),

las definiciones de inf y sup.

Cotas superiores y cotas inferiores (repaso)

Dado un subconjunto $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, consideramos el conjunto de sus cotas superiores y el conjunto de sus cotas inferiores:

$$\mathrm{CS}(A) := \{b \in \overline{\mathbb{R}} \colon \quad \forall a \in A \quad a \le b\}, \qquad \mathrm{CI}(A) := \{b \in \overline{\mathbb{R}} \colon \quad \forall a \in A \quad a \ge b\}.$$

Ejemplo. Sea $A = [4, 9[$. Entonces

Cotas superiores y cotas inferiores (repaso)

Dado un subconjunto $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, consideramos el conjunto de sus cotas superiores y el conjunto de sus cotas inferiores:

$$\mathrm{CS}(A) := \{b \in \overline{\mathbb{R}}: \quad \forall a \in A \quad a \le b\}, \qquad \mathrm{CI}(A) := \{b \in \overline{\mathbb{R}}: \quad \forall a \in A \quad a \ge b\}.$$

Ejemplo. Sea $A = [4, 9[$. Entonces

$$\mathrm{CS}(A) = [9, +\infty], \qquad \mathrm{CI}(A) = [-\infty, 4].$$

Definiciones del supremo y del ínfimo (repaso)

Proposición: Para cada $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, el conjunto $\mathrm{CS}(A)$ tiene un elemento mínimo.

Definiciones del supremo y del ínfimo (repaso)

Proposición: Para cada $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, el conjunto $\mathrm{CS}(A)$ tiene un elemento mínimo.

Proposición: Para cada $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, el conjunto $\mathrm{CI}(A)$ tiene un elemento máximo.

Definiciones del supremo y del ínfimo (repaso)

Proposición: Para cada $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, el conjunto $\mathrm{CS}(A)$ tiene un elemento mínimo.

Proposición: Para cada $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, el conjunto $\mathrm{CI}(A)$ tiene un elemento máximo.

Estas proposiciones son no triviales.

Sus demostraciones se basan en la construcción de los números reales.

Definiciones del supremo y del ínfimo (repaso)

Proposición: Para cada $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, el conjunto $\mathrm{CS}(A)$ tiene un elemento mínimo.

Proposición: Para cada $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, el conjunto $\mathrm{CI}(A)$ tiene un elemento máximo.

Estas proposiciones son no triviales.

Sus demostraciones se basan en la construcción de los números reales.

Definición. Dado $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$,

$$\sup(A) := \min(\mathrm{CS}(A)), \qquad \inf(A) := \max(\mathrm{CI}(A)).$$

Criterio de la desigualdad $\sup(A) \leq b$

Proposición

Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y sea $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\sup(A) \leq b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in A \qquad a \leq b.$$

Demostración

Vamos a mostrar que

$$\sup(A) \leq b \qquad \iff \qquad \forall a \in A \qquad a \leq b.$$

Demostración

Vamos a mostrar que

$$\sup(A) \leq b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in A \qquad a \leq b.$$

$\Longrightarrow$ Supongamos que $\sup(A) \leq b$. Sea $a \in A$. Queremos demostrar que $a \leq b$.

Demostración

Vamos a mostrar que

$$\sup(A) \leq b \qquad \iff \qquad \forall a \in A \qquad a \leq b.$$

$\Longrightarrow$ Supongamos que $\sup(A) \leq b$. Sea $a \in A$. Queremos demostrar que $a \leq b$.

Como $\sup(A) \in \mathrm{CS}(A)$, obtenemos $a \leq \sup(A)$.

Por la propiedad transitiva de $\leq$, concluimos que $a \leq b$.

Demostración

Vamos a mostrar que

$$\sup(A) \leq b \qquad \iff \qquad \forall a \in A \quad a \leq b.$$

$\Longrightarrow$ Supongamos que $\sup(A) \leq b$. Sea $a \in A$. Queremos demostrar que $a \leq b$.

Como $\sup(A) \in \mathrm{CS}(A)$, obtenemos $a \leq \sup(A)$.

Por la propiedad transitiva de $\leq$, concluimos que $a \leq b$.

$\Longleftarrow$ Supongamos que $\forall a \in A \quad a \leq b$.

Demostración

Vamos a mostrar que

$$\sup(A) \leq b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in A \qquad a \leq b.$$

$\Longrightarrow$ Supongamos que $\sup(A) \leq b$. Sea $a \in A$. Queremos demostrar que $a \leq b$.

Como $\sup(A) \in \mathrm{CS}(A)$, obtenemos $a \leq \sup(A)$.

Por la propiedad transitiva de $\leq$, concluimos que $a \leq b$.

$\Longleftarrow$ Supongamos que $\forall a \in A \quad a \leq b$.

Esta suposición significa que $b \in \mathrm{CS}(A)$.

Demostración

Vamos a mostrar que

$$\sup(A) \leq b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in A \qquad a \leq b.$$

$\Longrightarrow$ Supongamos que $\sup(A) \leq b$. Sea $a \in A$. Queremos demostrar que $a \leq b$.

Como $\sup(A) \in \mathrm{CS}(A)$, obtenemos $a \leq \sup(A)$.

Por la propiedad transitiva de $\leq$, concluimos que $a \leq b$.

$\Longleftarrow$ Supongamos que $\quad \forall a \in A \quad a \leq b$.

Esta suposición significa que $b \in \mathrm{CS}(A)$.

Como $\sup(A) = \min(\mathrm{CS}(A))$, concluimos que $\sup(A) \leq b$.

Análisis de la desigualdad $\sup(A) > b$

Hemos demostrado que

$$\sup(A) \leq b \quad \iff \quad \forall a \in A \quad a \leq b.$$

Como una consecuencia lógica, tendremos la forma contrapositiva de este resultado.
En otras palabras, de la forma $p \iff q$ pasamos a la forma $\neg p \iff \neg q$.

Análisis de la desigualdad $\sup(A) > b$

Hemos demostrado que

$$\sup(A) \leq b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in A \qquad a \leq b.$$

Como una consecuencia lógica, tendremos la forma contrapositiva de este resultado.
En otras palabras, de la forma $p \iff q$ pasamos a la forma $\neg p \iff \neg q$.

Proposición

Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y sea $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\sup(A) > b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists a \in A \qquad a > b.$$

Análisis de la desigualdad $\inf(A) \geq b$

Proposición

Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y sea $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\inf(A) \geq b \qquad \Longleftrightarrow$$

Análisis de la desigualdad $\inf(A) \geq b$

Proposición

Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y sea $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\inf(A) \geq b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in A \qquad a \geq b.$$

Análisis de la desigualdad $\inf(A) \geq b$

Proposición

Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y sea $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\inf(A) \geq b \qquad \iff \qquad \forall a \in A \qquad a \geq b.$$

Demostración: ejercicio.

Análisis de la desigualdad $\inf(A) < b$

Ya vimos que

$$\inf(A) \geq b \qquad \iff$$

Análisis de la desigualdad $\inf(A) < b$

Ya vimos que

$$\inf(A) \geq b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in A \qquad a \geq b.$$

Análisis de la desigualdad $\quad \inf(A) < b$

Ya vimos que

$$\inf(A) \geq b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in A \qquad a \geq b.$$

Pasamos a la forma contrapositiva de este resultado.

Análisis de la desigualdad $\inf(A) < b$

Ya vimos que

$$\inf(A) \geq b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in A \qquad a \geq b.$$

Pasamos a la forma contrapositiva de este resultado.

Proposición

Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y sea $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\inf(A) < b \qquad \Longleftrightarrow$$

Análisis de la desigualdad $\inf(A) < b$

Ya vimos que

$$\inf(A) \geq b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in A \qquad a \geq b.$$

Pasamos a la forma contrapositiva de este resultado.

Proposición

Sea $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y sea $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\inf(A) < b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists a \in A \qquad a < b.$$

Sobre la desigualdad $\sup(A) < b$: observaciones simples

Proposición

Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tales que $\sup(A) < b$. Entonces

Sobre la desigualdad $\sup(A) < b$: observaciones simples

Proposición

Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tales que $\sup(A) < b$. Entonces

$$\forall a \in A \qquad a < b.$$

Sobre la desigualdad $\sup(A) < b$: observaciones simples

Proposición

Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tales que $\sup(A) < b$. Entonces

$$\forall a \in A \qquad a < b.$$

Demostración. Como $\sup(A) \in \mathrm{CS}(A)$, para cada a en A tenemos

$$a \leq \sup(A) < b.$$

Sobre la desigualdad $\sup(A) < b$: observaciones simples

Proposición

Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tales que $\sup(A) < b$. Entonces

$$\forall a \in A \qquad a < b.$$

Demostración. Como $\sup(A) \in \mathrm{CS}(A)$, para cada a en A tenemos

$$a \leq \sup(A) < b.$$

Mostremos con un ejemplo que la condición $\forall a \in A \quad a < b$ no implica $\sup(A) < b$.

Ejemplo. $A = [-\infty, 5[\,, \quad b = 5.$

Un lema sobre desigualdades

Lema

Sean $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$x < y \quad\iff\quad \exists z \in \overline{\mathbb{R}} \quad (z < y \quad \wedge \quad x \leq z).$$

Un lema sobre desigualdades

Lema

Sean $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$x < y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists z \in \overline{\mathbb{R}} \qquad (z < y \quad \wedge \quad x \leq z).$$

Ejercicio. Demostrar el lema.

Criterio de la desigualdad $\sup(A) < b$

Proposición

Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\sup(A) < b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists c < b \quad \forall a \in A \quad a \leq c.$$

Criterio de la desigualdad $\sup(A) < b$

Proposición

Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\sup(A) < b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists c < b \quad \forall a \in A \quad a \leq c.$$

Demostración.

$\Longrightarrow$ Sea $\sup(A) < b$. Pongamos $c := \sup(A)$. Entonces

$$\forall a \in A \qquad a \leq c.$$

Criterio de la desigualdad $\sup(A) < b$

Proposición

Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\sup(A) < b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists c < b \quad \forall a \in A \quad a \leq c.$$

Demostración.

$\Longrightarrow$ Sea $\sup(A) < b$. Pongamos $c := \sup(A)$. Entonces

$$\forall a \in A \qquad a \leq c.$$

$\Longleftarrow$ Supongamos que $\quad \exists c < b \quad \forall a \in A \quad a \leq c. \quad$ Fijamos un número c con esta propiedad.

Criterio de la desigualdad $\sup(A) < b$

Proposición

Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\sup(A) < b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists c < b \quad \forall a \in A \quad a \leq c.$$

Demostración.

$\Longrightarrow$ Sea $\sup(A) < b$. Pongamos $c := \sup(A)$. Entonces

$$\forall a \in A \qquad a \leq c.$$

$\Longleftarrow$ Supongamos que $\exists c < b \quad \forall a \in A \quad a \leq c.$ Fijamos un número c con esta propiedad. Entonces $c \in \mathrm{CS}(A)$, por lo tanto $\sup(A) \leq c < b$.

Resumen, la primera parte

Poner la relación lógica correcta ($\iff$, $\implies$ o $\impliedby$).

$$\sup(A) \leq b \qquad ??? \qquad \forall a \in A \quad a \leq b;$$

$$\sup(A) > b \qquad ??? \qquad \exists a \in A \quad a > b;$$

$$\inf(A) \geq b \qquad ??? \qquad \forall a \in A \quad a \geq b;$$

$$\inf(A) < b \qquad ??? \qquad \exists a \in A \quad a < b.$$

Resumen, la segunda parte

Poner la relación lógica correcta ($\Longleftrightarrow$, $\Longrightarrow$ o $\Longleftarrow$).

$$\sup(A) < b \qquad ??? \qquad \forall a \in A \quad a < b;$$

$$\sup(A) \geq b \qquad ??? \qquad \exists a \in A \quad a \geq b;$$

$$\inf(A) > b \qquad ??? \qquad \forall a \in A \quad a > b;$$

$$\inf(A) \leq b \qquad ??? \qquad \exists a \in A \quad a \leq b;$$

Resumen, la tercera parte

Encontrar condiciones equivalentes, escritas en términos de cuantificadores y desigualdades.

$$\sup(A) < b \quad \Longleftrightarrow \quad \exists c < b \quad \forall a \in A \quad a \leq c;$$

$$\sup(A) \geq b \quad \Longleftrightarrow \quad ???$$

$$\inf(A) > b \quad \Longleftrightarrow \quad ???$$

$$\inf(A) \leq b \quad \Longleftrightarrow \quad ???$$