El supremo y el ínfimo de un conjunto

Objetivos. Definir las nociones del supremo y del ínfimo de un conjunto y estudiar sus propiedades básicas.

Requisitos. Eje real extendido, cotas superiores e inferiores.

Supremo de un conjunto

1. Definición (el supremo de un conjunto). Sea $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Un elemento $b \in \overline{\mathbb{R}}$ se llama *supremo* de A o *cota superior exacta* de A si b es la cota superior mínima de A, es decir, el elemento mínimo del conjunto de todas las cotas superiores de A.

2. Unicidad del supremo. De la definición está claro que si existe un supremo de A, entonces es único.

3. El supremo del conjunto vacío. Encuentre el supremo del conjunto vacío.

4. Conjuntos no acotados superiormente. Un conjunto $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ se llama *no acotado superiormente* si su única cota superior es $+\infty$. ¿Cuál es el supremo de un conjunto no acotado superiormente?

5. Existencia del supremo de cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío acotado superiormente (sin demostración). Cualquier conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente posée un único supremo.

6. Corolario: existencia del supremo de cualquier subconjunto del eje real extendido. Cualquier subconjunto A de $\overline{\mathbb{R}}$ tiene un único supremo.

Demostración. Considerar varios casos:

1. $+\infty \in A$.
2. $A \subseteq [-\infty, +\infty)$, pero A no es acotado superiormente.
3. $A = \varnothing$.
4. $A = \{-\infty\}$.
5. $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, A es acotado superiormente.
6. $A = \{-\infty\} \cup B$, donde $B \subseteq \mathbb{R}$, $B \neq \varnothing$, B es acotado superiormente.

$\square$

7. Descripción del supremo mediante un sistema de dos condiciones. Un elemento $b \in \overline{\mathbb{R}}$ es el supremo de un conjunto $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ si y sólo si se cumplen dos condiciones:

1. $\forall a \in A \qquad a \leq b.$
2. $\forall c < b \qquad \exists a \in A \qquad a > c.$

Ínfimo de un conjunto

8. Escriba la definición del ínfimo (notación: inf) y los enunciados correspondientes.

9. Describa el ínfimo de un conjunto mediante un sistema de dos condiciones.

Condiciones $\sup(A) \leq b$, $\inf(A) \geq b$

10. Proposición. Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tales que

$$\forall a \in A \qquad a \leq b.$$

Entonces $\sup(A) \leq b$.

Demostración. La hipótesis significa que b es una cota superior de A. Pero $\sup(A)$ es la menor de las cotas superiores de A. □

11. Proposición. También es válida la proposición recíproca: si $\sup(A) \leq b$, entonces para cualquier $a \in A$ se cumple la desigualdad $a \leq b$.

12. Criterio para $\sup(A) \leq b$. Juntando las dos proposiciones anteriores llegamos al siguiente resultado:

$$\sup(A) \leq b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in A \qquad a \leq b.$$

13. Pasar al sup en desigualdades estrictas. Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tales que

$$\forall a \in A \qquad a < b.$$

¿Qué conclusión podemos hacer acerca de $\sup(A)$ y b?. Justifique bien la respuesta.

14. Enuncie y demuestre proposiciones análogas para inf.

Condiciones $\sup(A) > b$, $\inf(A) < b$

15. Sean $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ y $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Demuestre que

$$\sup(A) > b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists a \in A \quad a > b.$$

16. Sean $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ y $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Determine si las siguientes dos condiciones son equivalentes o no. Justifique bien la respuesta.

(a) $\sup(A) \geq b$.

(b) $\exists a \in A \quad a \geq b$.

17. Enuncie y demuestre proposiciones análogas para inf.

El supremo y el ínfimo de la unión de dos conjuntos

18. Sean $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\sup(A \cup B) = \max\bigl\{\sup(A), \sup(B)\bigr\}, \qquad \inf(A \cup B) = \min\bigl\{\inf(A), \inf(B)\bigr\}.$$

Monotonía del supremo y del ínfimo

19. Sean $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ tales que $A \subset B$. Entonces $\sup A \le \sup B$.

20. Sean $A, B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ tales que $A \subset B$. Entonces $\inf A \ge \inf B$.