Subespacio de un espacio métrico

1 Definición. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$. Denotemos por d_Y la restricción de la función d al conjunto Y^2. Entonces (Y, d_Y) se llama *subespacio del espacio métrico* (X, d).

En las condiciones de la Definición 1, usamos la siguiente notación:

$$B_X(a, r) \coloneqq \{x \in X\colon\ d(x, a) < r\} \qquad (a \in X,\ r > 0);$$
$$B_Y(a, r) \coloneqq \{y \in Y\colon\ d(y, a) < r\} \qquad (a \in Y,\ r > 0).$$

Notemos que

$$B_Y(a, r) = B_X(a, r) \cap Y. \tag{1}$$

2 Ejemplo. Sea X el conjunto $\mathbb{R}$ con la métrica común y sea $Y = \mathbb{Z}$. En este caso

$$B_{\mathbb{R}}(5, 4) = (1, 9), \qquad B_{\mathbb{Z}}(5, 4) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = (1, 9) \cap \mathbb{Z}.$$

3 Proposición (descripción de subconjuntos abiertos en un subespacio métrico)**.** *Sea Y un subespacio de un espacio métrico X, y sea $W \subseteq Y$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) W es abierto en la topología inducida por la distancia d_Y;

(b) existe un conjunto V abierto en X tal que $W = V \cap Y$.

Demostración. Supongamos (a) y mostremos (b). Para cada x en W encontramos $r_x > 0$ tal que $B_Y(x, r_x) \subseteq W$. Entonces

$$W = \bigcup_{x \in W} B_Y(x, r_x).$$

Pongamos

$$V \coloneqq \bigcup_{x \in W} B_X(x, r_x).$$

Entonces V es un subconjunto abierto de X. Aplicando la fórmula (1) y la ley distributiva, obtenemos

$$W = \bigcup_{x \in W} B_Y(x, r_x) = \bigcup_{x \in W} (B_X(x, r_x) \cap Y) = \left(\bigcup_{x \in W} B_X(x, r_x) \right) \cap Y = V \cap Y.$$

Supongamos (b) y mostremos (a). Sea x en W. Entonces x en V y existe $r > 0$ tal que $B_X(x, r) \subseteq V$. Luego $B_Y(x, r) \subseteq V \cap Y = W$. $\square$

La Proposición 3 se puede enunciar de la siguiente manera:

$$\tau_Y = \{W \subseteq Y : \quad \exists V \in \tau_X \quad W = V \cap Y\}.$$

4 Ejemplo. Sea $X = \mathbb{R}$, $Y = [5, 10]$, $V = (3, 7)$, $W = V \cap Y = [5, 7)$. Entonces W es abierto en Y. Notemos que W no es abierto en X.

La situación se simplifica, si Y es abierto en X.

5 Corolario (descripción de subconjuntos abiertos en un subespacio, cuando el subespacio es un subconjunto abierto)**.** *Sea Y un subconjunto abierto de un espacio métrico X, y sea $W \subseteq Y$. Consideremos Y como subespacio del espacio métrico X. Entonces W es abierto en Y si, y solo si, W es abierto en X.*

6 Ejercicio (descripción de subconjuntos cerrados en un subespacio métrico)**.** Sea Y un subespacio de un espacio métrico X, y sea $H \subseteq Y$. Muestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) H es cerrado en la topología inducida por la distancia d_Y;

(b) existe un conjunto G cerrado en X tal que $H = G \cap Y$.

7 Ejercicio (descripción de subconjuntos cerrados en un subespacio, cuando el subespacio es un conjunto cerrado)**.** Sea Y un subconjunto cerrado de un espacio métrico X, y sea $H \subseteq Y$. Consideremos Y como subespacio del espacio métrico X. Entonces H es cerrado en Y si, y solo si, H es cerrado en X.

El interior y la cerradura de un conjunto en un subespacio métrico

8 Proposición. *Sea Y un subespacio de un espacio métrico X, y sea $A \subseteq Y$. Entonces*

$$\mathrm{cl}_Y(A) = \mathrm{cl}_X(A) \cap Y.$$

Demostración en términos de conjuntos cerrados. Pongamos $C \coloneqq \mathrm{cl}_X(A) \cap Y$. Entonces $A \subseteq C$ y C es cerrado en Y. Supongamos que H es un conjunto cerrado en Y tal que $A \subseteq H$. Entonces existe un conjunto G cerrado en X tal que $H = G \cap Y$. Entonces $A \subseteq G$ y $\mathrm{cl}_X(A) \subseteq \mathrm{cl}_X(G) = G$. Luego

$$C = \mathrm{cl}_X(A) \cap Y \subseteq G \cap Y = H.$$

Hemos demostrado que C es el más pequeño entre todos los conjuntos cerrados en Y que contienen al conjunto A. $\square$

9 Ejercicio. Demostrar la Proposición 8 usando la descripción de la cerradura en términos de bolas. Notemos que para cada y en Y y cada $r > 0$,

$$A \cap B_Y(y,r) = A \cap B_X(y,r).$$

Si una de estas intersecciones no es vacía, entonces la otra tampoco es vacía.

10 Proposición. *Sea Y un subespacio de un espacio métrico X, y sea $A \subseteq Y$. Entonces*

$$\mathrm{int}_Y(A) = Y \cap \mathrm{int}_X(A \cup (X \setminus Y)).$$

En particular,

$$\mathrm{int}_X(A) \subseteq \mathrm{int}_Y(A).$$

Demostración. Notemos que

$$X \setminus (Y \setminus A) = (Y \cap A^c)^c = A \cup (X \setminus Y).$$

Luego

$$\begin{aligned} \mathrm{int}_Y(A) &= Y \setminus \mathrm{cl}_Y(Y \setminus A) = Y \setminus (\mathrm{cl}_X(Y \setminus A) \cap Y) = Y \setminus \mathrm{cl}_X(Y \setminus A) \\ &= Y \setminus (X \setminus \mathrm{int}_X(X \setminus (Y \setminus A))) = Y \cap \mathrm{int}_X(A \cup (X \setminus Y)). \end{aligned}$$ □

11 Ejemplo. $X = \mathbb{R}$, $Y = [0,5]$, $A = [0,3)$. Entonces $\mathrm{int}_X(A) = (0,3)$, $\mathrm{int}_Y(A) = [0,3)$.