

La propiedad subaditiva de medidas (un tema de “Análisis Real”)

Egor Maximenko

<http://www.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

11 de abril de 2021

Objetivos. Demostrar la propiedad subaditiva de medidas.

Prerrequisitos:

- definición de medidas y sus propiedades elementales;
- la medida de la unión de una sucesión creciente;
- series de números.

Repaso

Proposición (sobre la medida de la unión e intersección de dos conjuntos)

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y sean $A, B \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Repaso

Proposición (sobre la medida de la unión e intersección de dos conjuntos)

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y sean $A, B \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Teorema (sobre la medida de la unión de una sucesión creciente de conjuntos)

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y sea $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente en \mathcal{F} . Entonces

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(A_m).$$

Receta para pasar de una sucesión arbitraria de conjuntos a una sucesión creciente

Proposición (sobre las uniones parciales de una sucesión arbitraria de conjuntos)

Sea $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos. Para cada k en \mathbb{N} , pongamos

$$V_k := \bigcup_{j=1}^k A_j.$$

Entonces la sucesión $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es creciente y

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_k = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j.$$

Demostración de la proposición sobre las uniones parciales, inicio

$$V_k := \bigcup_{j=1}^k A_j.$$

I. Mostremos que $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ \nearrow . Para cada k en \mathbb{N} ,

$$V_{k+1} = \bigcup_{j=1}^{k+1} A_j = \left(\bigcup_{j=1}^k A_j \right) \cup A_{k+1} = V_k + A_{k+1} \supseteq V_k.$$

Demostración de la proposición sobre las uniones parciales, final

II. Para cada k en \mathbb{N} , tenemos $V_k = \bigcup_{j=1}^k A_j \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$, luego

Demostración de la proposición sobre las uniones parciales, final

II. Para cada k en \mathbb{N} , tenemos $V_k = \bigcup_{j=1}^k A_j \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$, luego

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_k \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j.$$

Demostración de la proposición sobre las uniones parciales, final

II. Para cada k en \mathbb{N} , tenemos $V_k = \bigcup_{j=1}^k A_j \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$, luego

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_k \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j.$$

Por otro lado, para cada j en \mathbb{N} tenemos $A_j \subseteq V_j \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_k$, luego

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_k.$$

La propiedad subaditiva de medidas

Vamos a demostrar que

la medida de la unión es menor o igual que la suma de las medidas.

La propiedad subaditiva de medidas

Vamos a demostrar que

la medida de la unión es menor o igual que la suma de las medidas.

- Primero, veremos el caso de dos conjuntos.
- Luego, el caso de uniones finitas.
- Finalmente, el caso de uniones numerables.

La propiedad subaditiva de la medida, el caso de dos conjuntos

Proposición

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y sean $A, B \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

La propiedad subaditiva de la medida, el caso de dos conjuntos

Proposición

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y sean $A, B \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

Demostración.

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

La propiedad subaditiva de la medida, el caso de uniones finitas

Proposición

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida. Entonces

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{\forall (A_k)_{k=1}^n \in \mathcal{F}^n \quad \mu \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k)}_{P(k)}.$$

La propiedad subaditiva de la medida, el caso de uniones finitas

Proposición

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida. Entonces

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{\forall (A_k)_{k=1}^n \in \mathcal{F}^n \quad \mu \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k)}_{P(k)}.$$

Demostración: inducción sobre k .

La propiedad subaditiva de la medida, el caso de uniones finitas

Proposición

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida. Entonces

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{\forall (A_k)_{k=1}^n \in \mathcal{F}^n \quad \mu \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k)}_{P(k)}.$$

Demostración: inducción sobre k .

La afirmación $P(1)$ es trivial, porque $\bigcup_{k=1}^1 A_k = A_1$.

La propiedad subaditiva de la medida, el caso de uniones finitas

Suponiendo $P(n)$ demosremos $P(n + 1)$.

La propiedad subaditiva de la medida, el caso de uniones finitas

Suponiendo $P(n)$ demostremos $P(n+1)$.

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) &\stackrel{(1)}{=} \mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \cup A_{n+1}\right) \stackrel{(2)}{\leq} \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) + \mu(A_{n+1}) \\ &\stackrel{(3)}{\leq} \sum_{k=1}^n \mu(A_k) + \mu(A_{n+1}) \stackrel{(4)}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \mu(A_k).\end{aligned}$$

Justificación de los pasos:

- (1) la definición inductiva de $\bigcup_{k=1}^n$;
- (2) propiedad subaditiva de μ , en el caso de dos conjuntos;
- (3) hipótesis de inducción $P(n)$ aplicada a la lista de conjuntos $(A_k)_{k=1}^n$;
- (4) la definición inductiva de $\sum_{k=1}^n$.

La propiedad subaditiva de la medida, el caso de una unión numerable

Teorema

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y sea $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. Entonces

$$\mu \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Demostración del teorema

Para cada k en \mathbb{N} , $V_k := \bigcup_{j=1}^k A_j$. Entonces $\mu(V_k) \stackrel{(1)}{\leq} \sum_{j=1}^k \mu(A_j)$.

$$\mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) \stackrel{(1)}{=} \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_k\right) \stackrel{(2)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(V_k) \stackrel{(3)}{\leq} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \mu(A_j) \stackrel{(4)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Justificación:

- (1) la propiedad finitamente subaditiva de μ ;
- (2) $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_k$;
- (3) teorema sobre la medida de la unión de una sucesión creciente;
- (4) el paso al límite en (1); los límites existen porque las sucesiones son crecientes;
- (5) definición de $\sum_{j=1}^{\infty}$.

Vamos a ver que el teorema no se generaliza a familias no numerables.

¿Cómo definir sumas no numerables de números no negativos?

Si $(x_j)_{j \in J}$ es una familia arbitraria (posiblemente no numerable) en $[0, +\infty]$, hay varios caminos equivalentes para definir $\sum_{j \in J} x_j$.

En todos estos tres caminos se utiliza la colección

$$\mathcal{K} := \{K \subseteq J: K \text{ es finito}\}.$$

A. $\sup\{\sum_{j \in K} x_j: K \in \mathcal{K}\}.$

B. El límite de la red $\left(\sum_{j \in K} x_j\right)_{K \in \mathcal{K}}$, donde \mathcal{K} es dirigido con \subseteq .

C. De manera similar a B, pero usar el concepto del límite de un filtro.

Contraejemplo con una unión no numerable

Ejercicio. Consideremos el espacio de medida (X, \mathcal{F}, μ) , donde X es un conjunto infinito no numerable,

$$\mathcal{N} := \{Y \subseteq X : Y \text{ es finito o numerable}\}, \quad \mathcal{F} := \{Y \subseteq X : Y \in \mathcal{N} \vee X \setminus Y \in \mathcal{N}\},$$

$$\mu(Y) := \begin{cases} 0, & Y \in \mathcal{N}; \\ +\infty, & X \setminus Y \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

Construir una familia no numerable $(A_j)_{j \in J}$ en \mathcal{F} tal que

$$\mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = +\infty, \quad \text{pero} \quad \forall j \in J \quad \mu(A_j) = 0.$$

Receta para pasar de una suc. arbitraria de conjuntos a una suc. disjunta

Ejercicio. Sea $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria de conjuntos. Definimos

$$V_0 := \emptyset, \quad V_k := \bigcup_{j=1}^k A_j \quad D_k := V_k \setminus V_{k-1} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Demostrar que

- para cada k en \mathbb{N} , $D_k = A_k \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \right)$,
- para cada k en \mathbb{N} , $D_k \subseteq A_k$,
- la sucesión $(D_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es disjunta,
- $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} D_k$.

Otra demostración de la propiedad subaditiva

Ejercicio. Demostrar la propiedad subaditiva de las medidas (en el caso de uniones numerables) usando el resultado del ejercicio anterior.

Resumen: la medida de la unión, varios casos

Sea $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión en \mathcal{F} .

Queremos relacionar la medida del conjunto $B := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ con las medidas de A_k .

Resumen: la medida de la unión, varios casos

Sea $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión en \mathcal{F} .

Queremos relacionar la medida del conjunto $B := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ con las medidas de A_k .

título	suposición adicional	fórmula
propiedad σ -aditiva	$(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es disjunta	$\mu(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$
medida de la unión de una suc. creciente	$(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \nearrow$	$\mu(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$
propiedad subaditiva		$\mu(B) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$



↑
Completez del espacio L^p

Teorema de la convergencia dominada

Lema de Fatou

Teorema de la convergencia monótona

Propiedad σ -subaditiva de medida

Medida de la unión de una suc. creciente

Propiedad σ -aditiva de medida