La propiedad subaditiva de la medida

Objetivos. Demostrar que la medida tiene propiedad subaditiva.

Requisitos. Medidas, propiedades básicas de medidas, la medida de la unión de una sucesión creciente de conjuntos.

En este tema suponemos que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida.

1 Proposición (propiedad subaditiva, el caso de dos conjuntos)**.** *Sean $A, B \in \mathcal{F}$. Entonces*

$$\mu(A \cup B) \le \mu(A) + \mu(B).$$

2 Proposición (propiedad subaditiva, el caso finito)**.** *Sean $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$. Entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Idea de demostración. Inducción matemática sobre n y la proposición anterior. □

3 Teorema (propiedad subaditiva)**.** *Sea $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{F}$. Entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) \le \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j).$$

Idea de demostración. Definamos conjuntos B_k, $k \in \mathbb{N}$, como las "uniones parciales" de la sucesión $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$:

$$B_k := \bigcup_{j=1}^{k} A_j.$$

Es fácil ver que

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k.$$

Además, $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de conjuntos. Por la proposición anterior, $\mu(B_k) \le \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j)$. Aplicamos el teorema sobre la medida de la unión de una sucesión creciente de conjuntos:

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k) \le \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j).$$ □

4 Ejercicio. Haga la demostración con todos los detalles. En particular, justifique la desigualdad $\le$ en la última cadena.

5 Corolario (la unión de una sucesión de conjuntos de medida cero)**.** *Sea* $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* $\mathcal{F}$ *tal que* $\mu(A_j) = 0$ *para todo* j *en* $\mathbb{N}$. *Entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = 0.$$

Medidas $\boldsymbol{\sigma}$-finitas

6 Definición (el conjunto de los conjuntos medibles de medida finita)**.** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Pongamos

$$\mathcal{F} := \Big\{A \in \mathcal{F} \colon\ \mu(A) < +\infty\Big\}.$$

7 Proposición (criterio de que una medida es σ-finita)**.** *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio con medida. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) existe $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ *tal que* $X = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$.

(b) existe una sucesión creciente $(B_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ *tal que* $X = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$.

(c) existe una sucesión disjunta $(C_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ *tal que* $X = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} C_j$.

Si μ *cumple con estas condiciones, entonces se llama* σ*-finita.*