Estructura de discontinuidades de funciones monótonas (un tema de análisis)

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
Mexico

22 de octubre de 2024

Objetivos

Dada una función creciente o decreciente $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, vamos a demostrar que:

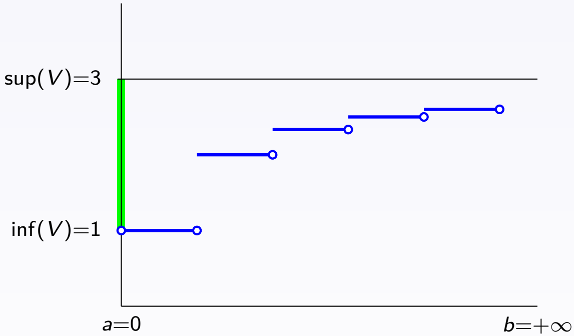
- las únicas discontinuidades posibles de f son saltos;
- el conjunto de los saltos de f es finito o numerable.

Este tema está organizado como una serie de ejercicios.

Prerrequisitos

- Funciones crecientes y decrecientes.
- Límites laterales.
- Conjuntos finitos y conjuntos numerables.

Ejemplo



$$(a, b) = (0, +\infty)$$

$$f(x) = \frac{3\lfloor x \rfloor + 1}{\lfloor x \rfloor + 1}$$

Repaso: límites de funciones crecientes

Proposición

Sean $a, b \in [-\infty, +\infty]$, $a < b$,

$f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ una función creciente,

$$V := f[(a, b)].$$

Entonces

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in (a,b)}} f(x) = \inf(V),$$

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x \in (a,b)}} f(x) = \sup(V).$$

Los límites de una función decreciente en los extremos de un intervalo

Proposición

Sean $a, b \in [-\infty, +\infty]$, $a < b$,

$f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ una función decreciente,

$$V := f[(a, b)].$$

Entonces

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in (a,b)}} f(x) = \sup(V),$$

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x \in (a,b)}} f(x) = \inf(V).$$

Los límites laterales de una función creciente en un punto

Ejercicio 1. Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función creciente, $x \in \operatorname{int}(A)$. Explicar por qué existen los límites

$$\lim_{\substack{t \to x \\ t > x}} f(t), \qquad \lim_{\substack{t \to x \\ t < x}} f(t).$$

Estos límites se denotan por $f(x^+)$ y $f(x^-)$, respectivamente.

Los límites laterales y el valor en el punto

Ejercicio 2. En la situación del ejercicio anterior, demostrar que

$$f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+).$$

Los límites laterales y el valor en el punto

Ejercicio 2. En la situación del ejercicio anterior, demostrar que

$$f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+).$$

Ejercicio 3. En la situación del ejercicio anterior, demostrar que f es continua en x si, y solo si, $f(x^-) = f(x^+)$.

Comparación de los límites laterales en dos puntos

Ejercicio 4. Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función creciente, $x, y \in A$, $x < y$. Demostrar que

$$f(x^+) \le f(y^-).$$

Sugerencia: usar un punto intermedio entre x, y.

Sumas finitas de las alturas de los saltos de una función creciente

Ejercicio 5. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función creciente, sean $a < x_1 < \ldots < x_n < b$. Demostrar que

$$\sum_{j=1}^{n} (f(x_j^+) - f(x_j^-)) \le f(b) - f(a).$$

El conjunto de los saltos de altura grande

Ejercicio 6. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función creciente, y sea $h > 0$. Consideremos el conjunto de los puntos de salto de f, de altura $\geq h$:

$$S_h \coloneqq \{x \in (a,b)\colon\; f(x^+) - f(x^-) \geq h\}.$$

Demostrar que S_h es finito.

El conjunto de todos los saltos

Ejercicio 7. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función creciente.

Consideremos el conjunto de todos puntos de salto de f:

$$S := \{x \in (a,b)\colon\ f(x^+) - f(x^-) > 0\}.$$

Demostrar que S es finito o numerable.