El espectro de un elemento de un álgebra de Banach en una subálgebra

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad e y sea $\mathcal{S}$ una subálgebra cerrada de $\mathcal{A}$ tal que $e \in \mathcal{S}$.

1 Proposición. $\mathrm{Inv}(\mathcal{S}) \subseteq \mathrm{Inv}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{S}$.

Demostración. Sea $a \in \mathrm{Inv}(\mathcal{S})$. Primero notemos que $a \in \mathcal{S}$. Además, existe b en $\mathcal{S}$ tal que $ab = e$ y $ba = e$. Como $b \in \mathcal{A}$, esto implica que $a \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$. $\square$

2 Lema. *Sean X un espacio topológico, V y W conjuntos abiertos en X, $V \subseteq W$, y W no contiene puntos de la frontera de V. Entonces V es una unión de algunas de las componentes conexas de W.*

Demostración. Sea Ω una componente de W tal que $\Omega \cap V \neq \varnothing$. Sea $U = X \setminus \mathrm{clos}(V)$. Como W no contiene puntos de la frontera de V, Ω es la unión de los conjuntos abiertos disjuntos $\Omega \cap V$ y $\Omega \cap U$. Como Ω es conexo, $\Omega \cap U = \varnothing$. Esto significa que $\Omega \subseteq V$. $\square$

3 Lema. *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, b un punto de la frontera de $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, y $\lim_{n\to\infty} a_n = b$. Entonces $\lim_{n\to\infty} \|a_n^{-1}\| = +\infty$.*

Demostración. Supongamos que $\liminf_{n\to\infty} \|a_n^{-1}\| = M < +\infty$. Encontramos N_1 en $\mathbb{N}$ tal que $\|a_n - b\| < 1/(2M)$ para cada $n \geq N_1$. Luego encontramos $n \geq N_1$ tal que $\|a_n^{-1}\| < 2M$. Entonces

$$\|a_n^{-1}b - e\| \leq \|a_n^{-1}\| \, \|b - a_n\| < 1.$$

Esto implica que $a_n^{-1}b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$. Como $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ es un grupo, $b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$. Pero esto contradice a la suposición que b está en la frontera de $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$. $\square$

4 Proposición. $\mathrm{Inv}(\mathcal{S})$ *es una unión de componentes de* $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$.

Demostración. Pongamos $V = \mathrm{Inv}(\mathcal{S})$, $W = \mathrm{Inv}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{S}$. Entonces V y W son subconjuntos abiertos de $\mathcal{S}$ y $V \subseteq W$. Mostremos que W no contiene puntos de la frontera de V.

Sea b un punto de la frontera de $\mathrm{Inv}(\mathcal{S})$. Entonces existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathrm{Inv}(\mathcal{S})$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = b$. Por el Lema, $\|a_n^{-1}\| \to +\infty$. Si $b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, entonces $\|a_n^{-1}\| \to \|b^{-1}\|$, y es una contradicción. Luego $b \notin \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$. $\square$

5 Proposición. *Sea $a \in \mathcal{S}$. Entonces $\operatorname{Sp}_{\mathcal{S}}(a)$ es la unión de $\operatorname{Sp}_{\mathcal{A}}(a)$ y de alguna colección de componentes acotadas del complemento de $\operatorname{Sp}_{\mathcal{A}}(a)$. En particular, la frontera de $\operatorname{Sp}_{\mathcal{S}}(a)$ está contenida en $\operatorname{Sp}_{\mathcal{A}}(a)$.*

Demostración. Sean $\Omega_{\mathcal{A}} = \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}_{\mathcal{A}}(a)$, $\Omega_{\mathcal{S}} = \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}_{\mathcal{S}}(a)$. La contención $\Omega_{\mathcal{S}} \subseteq \Omega_{\mathcal{A}}$ es obvia. Sea λ_0 un punto de la frontera de $\Omega_{\mathcal{S}}$. Entonces $\lambda_0 e - x$ es un punto de la frontera de $\operatorname{Inv}(\mathcal{S})$. Luego $\lambda_0 e - x \notin \operatorname{Inv}(\mathcal{A})$. Por lo tanto, $\lambda_0 \notin \Omega_{\mathcal{A}}$. Ahora el Lema 2 implica que $\Omega_{\mathcal{S}}$ es la unión de algunas componentes de $\Omega_{\mathcal{A}}$. Entonces otras componentes de $\Omega_{\mathcal{A}}$ son subconjuntos de $\operatorname{Sp}_{\mathcal{S}}(a)$. $\square$

6 Corolario. *Si $\operatorname{Sp}_{\mathcal{S}}(a)$ tiene interior vacío, entonces $\operatorname{Sp}_{\mathcal{S}}(a) = \operatorname{Sp}_{\mathcal{A}}(a)$.*

En particular, esto sucede cuando $\operatorname{Sp}_{\mathcal{S}}(a)$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Conceptos básicos de la conexidad topológica (repaso breve)

7 Definición (espacio topológico conexo)**.** Sea X un espacio topológico. Se dice que X es *conexo* si no existe A tal que $\varnothing \subsetneq A \subsetneq X$, A es abierto y $X \setminus A$ es abierto.

8 Definición (topología del subespacio)**.** Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$. Definimos $\tau_Y \subseteq \mathcal{P}(Y)$:

$$\tau_Y := \{W \in \mathcal{P}(Y) \colon\ \exists V \in \tau\ W = V \cap Y\}.$$

Es fácil ver que τ_Y es una topología en Y.

9 Definición (subconjunto conexo en un espacio topológico)**.** Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$. Denotemos por τ_Y a la topología del subespacio (la topología inducida). Se dice que el conjunto Y es conexo si el espacio topológico (Y, τ_Y) es conexo.

10 Definición (componente de conexidad)**.** Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$. Denotemos por $\mathcal{C}$ al conjunto de los subconjuntos conexos de Y, con la relación de orden parcial $\subseteq$. Un conjunto V se llama *componente conexa* de Y si V es un elemento maximal de $\mathcal{C}$.

Se sabe que las componentes conexas de Y forman una partición de Y.

11 Proposición. *Sean (X, τ) un espacio topológico, $Y \in \tau$, $V \subseteq Y$. Entonces V es una componente conexa de Y si, y solo si, $V \in \tau$ y no existe $W \in \tau$ tal que $\varnothing \subsetneq W \subsetneq V$ y $V \setminus W \in \tau$.*