# El teorema espectral para elementos normales

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C* con identidad $e$.

**1 Proposición.** *Sea $\Lambda$ una colección de C*-subálgebras de $\mathcal{A}$. Entonces $\cap\Lambda$ es una C*-subálgebra de $\mathcal{A}$.*

**2 Definición** (C*-subálgebra generada por un conjunto)**.** Dado un subconjunto $X$ de $\mathcal{A}$. La *C*-subálgebra de $\mathcal{A}$ generada por $X$* se define como la intersección de todas las C*-subálgebras de $\mathcal{A}$ que contienen al conjunto $X$. La denotemos por $\mathcal{A}[S]$.

**3 Proposición** (C*-subálgebra generada por un elemento normal)**.** *Sea $x \in \mathcal{A}$ tal que $x^*x = xx^*$. Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de los elementos de $\mathcal{A}$ que se puede representar en la forma $p(x, x^*)$, donde $p$ es un polinomio complejo en dos variables. Entonces $\mathrm{cl}(\mathcal{P}) = \mathcal{A}[x]$. Más aún, $\mathcal{A}[x]$ es conmutativa.*

**4 Teorema** (teorema espectral para elementos normales)**.** *Sea $x \in \mathcal{A}$ tal que $x^*x = xx^*$. Definimos $\Phi\colon \mathcal{M}(\mathcal{A}[a]) \to \mathrm{Sp}(x)$,*

$$\Phi(\varphi) \coloneqq \varphi(x).$$

*Denotamos por $\Gamma$ a la transformada de Gelfand del álgebra $\mathcal{A}[x]$. Definimos $\Lambda\colon \mathcal{A}[x] \to C(\mathrm{Sp}(x))$,*

$$\Lambda(y)(t) \coloneqq \Gamma(y)(\Phi^{-1}(t)) \qquad (y \in \mathcal{A}[x],\ t \in \mathrm{Sp}(x)).$$

*En otras palabras,*

$$\Lambda(y) \coloneqq \Gamma(y) \circ \Phi^{-1}.$$

*Entonces se cumplen las siguientes propiedades.*

1. *$\Phi$ es un homeomorfismo.*

2. *$\Lambda$ es un C*-isomorfismo de $\mathcal{A}[x]$ sobre $C(\mathrm{Sp}(x))$.*

3. *Para cualquier polinomio $p$ con coeficientes complejos en dos variables,*

$$\Lambda(p(x, x^*))(z) = p(z, \overline{z}) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

*Demostración.* 1. Como $\mathcal{A}$ es un álgebra C* con identidad y $\mathcal{A}[x]$ es su C*-subálgebra con la misma identidad,

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(x) = \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}[x]}(x).$$

Pongamos $K \coloneqq \mathcal{M}(\mathcal{A}[x])$. Por propiedades generales de la transformada de Gelfand,

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}[x]}(x) = \{\varphi(x)\colon\ \varphi \in K\}.$$

Por eso

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(x) = \{\varphi(x)\colon\ \varphi \in K\}.$$

Luego la función $\Phi$ realmente toma valores en $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(x)$, y su definición es consistente. Más aún, $\Phi$ es suprayectiva.

Notemos que $\Phi$ se puede escribir como

$$\Phi(\varphi) = \Gamma(x)(\varphi) \qquad (\varphi \in K).$$

Como $\Gamma(x) \in C(K)$, concluimos que la función $\Phi$ es continua.

Mostremos que $\Phi$ es inyectiva. Sean $\varphi, \psi \in K$ tales que $\Phi(\varphi) = \Phi(\psi)$, esto es, $\varphi(x) = \psi(x)$. Luego

$$\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)} = \overline{\psi(x)} = \psi(x^*).$$

De aquí se sigue que para cualquier polinomio $p$ con coeficientes complejos en dos variables se cumple

$$\varphi(p(x, x^*)) = \psi(p(x, x^*)).$$

Esto significa que $\varphi$ y $\psi$ coinciden en $\mathcal{P}$. Como $\mathcal{P}$ es denso en $\mathcal{A}[x]$, concluimos que $\varphi = \psi$.

Hemos mostrado que $\Phi$ es una función biyectiva y continua $K \to \mathrm{Sp}(x)$. Como $K$ y $\mathrm{Sp}(x)$ son compactos de Hausdorff, $\Phi$ es un homeomorfismo.

2. Como $\mathcal{A}[x]$ es un álgebra C* conmutativa, la transformada de Gelfand $\Gamma$ es un C*-isomorfismo. La función $\Lambda$ se obtiene de $\Gamma$ por medio de un cambio de variable. Es fácil ver que $\Lambda$ también es un C*-isomorfismo. Por ejemplo, verifiquemos que $\Lambda$ es multiplicativa. Sean $a, b \in \mathcal{A}[x]$. Entonces $\Gamma(ab) = \Gamma(a)\Gamma(b)$, esto es, para cada $t$ en $K$ se cumple la igualdad

$$\Gamma(ab)(t) = \Gamma(a)(t)\Gamma(b)(t).$$

Dado $z$ en $\mathrm{Sp}(x)$, aplicamos la igualdad anterior con $t = \Phi^{-1}(z)$ y obtenemos

$$\Lambda(ab)(z) = \Lambda(a)(z)\Lambda(b)(z).$$

Hemos mostrado que $\Lambda(ab) = \Lambda(a)\Lambda(b)$.

3. Notamos que

$$\Gamma(x)(\varphi) = \varphi(x) = \Phi(\varphi)$$

y

$$\Gamma(x^*)(\varphi) = \varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)} = \overline{\Phi(\varphi)}.$$

Luego

$$\Lambda(x)(z) = \Gamma(x)(\Phi^{-1}(z)) = \Phi(\Phi^{-1}(z)) = z$$

y

$$\Lambda(x^*)(z) = \Gamma(x^*)(\Phi^{-1}(z)) = \overline{\Phi(\Phi^{-1}(z))} = \overline{z}.$$

Para cada polinomio en dos variables de la forma

$$p(z,w) = \sum_{j+k\le m} \alpha_{j,k} z^j w^k$$

obtenemos

$$p(x,x^*) = \sum_{j+k\le m} \alpha_{j,k} x^j (x^*)^k,$$

y como $\Lambda$ es un homomorfismo,

$$\Lambda(p(x,x^*))(z) = \sum_{j+k\le m} \alpha_{j,k} \Lambda(x)(z)\Lambda(x^*)(z) = \sum_{j+k\le m} \alpha_{j,k} z^j \overline{z}^k = p(z,\overline{z}). \qquad \square$$

**5 Proposición** (unicidad del C*-isomorfismo $\Lambda$ del teorema anterior)**.** *Sea $x \in \mathcal{A}$ tal que $x^*x = xx^*$. Entonces existe un único C*-isomorfismo $\Lambda\colon \mathcal{A}[x] \to C(\mathrm{Sp}(x))$ tal que para cualquier polinomio $p$ con coeficientes complejos en dos variables,*

$$\Lambda(p(x,x^*))(z) = p(z,\overline{z}) \qquad (z \in \mathbb{C}). \tag{1}$$

*Demostración.* La existencia está demostrada en el Teorema 4. Demostremos la unicidad. Sean $\Lambda$ y $\Lambda_1$ C*-isomorfismos $\mathcal{A}[x] \to C(\mathrm{Sp}(x))$ tales que para cualquier polinomio $p$ con coeficientes complejos en dos variables se cumple (1). Entonces $\Lambda$ y $\Lambda_1$ coinciden en el conjunto $\mathcal{P}$. El conjunto $\mathcal{P}$ es denso en $\mathcal{A}[x]$, y las funciones $\Lambda$ y $\Lambda_1$ son continuas. Luego $\Lambda$ y $\Lambda_1$ coinciden en todo el dominio $\mathcal{A}[x]$. $\square$