Fórmula de Gelfand–Beurling para el radio espectral

1 Lema (un corolario del principio de acotación uniforme)**.** *Sea V un espacio de Banach y sea $X \subseteq V$. Entonces X es acotado si y solo si X es débilmente acotado, esto es,*

$$\forall \varphi \in V^* \qquad \sup_{x \in X} |\varphi(x)| < +\infty.$$

Demostración. Sea X es acotado. Entonces existe $M > 0$ tal que $\|x\| \le M$ para cada x en X. Luego para cada φ en V^* tenemos

$$\sup_{x \in X} |\varphi(x)| \le M \|\varphi\|.$$

Al revés, supongamos que X es débilmente acotado. Para cada v en V consideremos el funcional de evaluación en v:

$$\Lambda(v) \colon V^* \to \mathbb{C}, \qquad \Lambda(v)(\varphi) \coloneqq \varphi(x).$$

Entonces $\Lambda(X)$ es un subconjunto del espacio bidual V^{**}. La condición que X significa que podemos aplicar el principio de acotación uniforme, y así obtenemos que existe $M > 0$ tal que $\|\Lambda(x)\| \le M$ para cada x en X. Finalmente, se sabe (por el teorema de Hahn–Banach) que $\|\Lambda(x)\| = \|x\|$ para cada x en X. □

2 Teorema. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad e, y sea $a \in \mathcal{A}$. Entonces*

$$r(a) = \lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Demostración. Por un lado, para cada n en $\mathbb{N}$ tenemos que $r(a)^n = r(a^n) \le \|a^n\|$. Luego

$$r(a) \le \|a^n\|^{1/n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

En esta desigualdad pasamos al límite inferior cuando $n \to \infty$. Obtenemos

$$r(a) \le \liminf_{n \to \infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Para terminar la demostración, será suficiente probar que

$$\limsup_{n \to \infty} \|a^n\|^{1/n} \le r(a). \tag{1}$$

Si $a = 0$, entonces (1) se cumple de manera trivial. Supongamos que $a \neq 0$. Sea $\xi \in \mathbb{C}$ tal que $|\xi| \le 1/r(a)$. Mostremos que la sucesión $((\xi a)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada.

Sea $r_1 > r(a)$. Dado un funcional lineal $\varphi \in \mathcal{A}$, consideremos la función

$$f\colon \mathbb{C}\setminus \operatorname{Sp}(a) \to \mathbb{C}, \qquad f(\lambda) \coloneqq \varphi(R_a(\lambda)).$$

Ya sabemos que la función f es holomorfa. De la definición del radio espectral $r(a)$ se sigue que

$$\{\lambda \in \mathbb{C}\colon\ |\lambda| > r(a)\} \subseteq \mathbb{C}\setminus \operatorname{Sp}(a).$$

Sea $r_1 > r(a)$. Entonces $r_1\mathbb{T} \subseteq \mathbb{C}\,\operatorname{Sp}(a)$. Sabemos que

$$R_a(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} a^k.$$

La serie converge de manera uniforme sobre $r_1\mathbb{T}$. Aplicamos φ:

$$f(\lambda) = \varphi(R_a(\lambda)) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k-1} \varphi(a^k).$$

La convergencia sigue siendo uniforme sobre $r_1\mathbb{T}$. Integramos sobre el contorno $r_1\mathbb{T}$ término a término:

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{|\lambda|=r_1} \lambda^n f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(a^k)}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{|\lambda|=r_1} \lambda^{n-k-1}\,\mathrm{d}\lambda = \varphi(a^n).$$

Sea $M = \sup_{\lambda\in r_1\mathbb{T}} |f(\lambda)|$. Luego

$$|\varphi(a^n)| \le M r_1^n.$$

En otras palabras, la sucesión $(a^n/r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es débilmente acotada. Por un corolario del principio de acotación uniforme, existe $C > 0$ tal que para cada n en $\mathbb{N}$

$$\|a^n\| \le C r_1^n.$$

Luego

$$\|a^n\|^{1/n} \le C^{1/n} r_1.$$

Como consecuencia,

$$\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} \le r_1.$$

Como r_1 es un número arbitrario con $r_1 > r(a)$, hemos mostrado que

$$\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} \le r(a). \qquad \square$$