El radio espectral

1 Definición. Sea $a \in \mathcal{A}$. Entonces

$$r(a) = \sup\{|\lambda| : \ \lambda \in \mathrm{Sp}(a)\}.$$

2 Ejemplo. Sea $\mathcal{A} = C(K)$, donde K es un compacto. Entonces para cada a en $\mathcal{A}$ se tiene que $\mathrm{Sp}(a) = a(K)$, por lo cual

$$r(a) = \sup_{x \in K} |a(x)| = \|a\|.$$

3 Ejemplo. Sea $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces $\|A\| = 1$, pero $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ y $r(A) = 0$.

4 Proposición. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad e y sean $a, b \in \mathcal{A}$. Entonces $e - ab$ es invertible si y solo si $e - ba$ es invertible.*

Demostración. Supongamos que $e - ab$ es invertible. Pongamos

$$u = b(e - ab)^{-1}a + e.$$

Mostremos que u es el elemento inverso de $e - ba$. En efecto,

$$a(e - ba) = a - aba = (e - ab)a,$$

por eso

$$\begin{aligned} u(e - ba) &= b(e - ab)^{-1}a(e - ba) + e(e - ba) = b(e - ab)^{-1}(e - ab)a + e - ba \\ &= ba + e - ba = e. \end{aligned}$$

De manera similar,

$$(e - ba)b = b - bab = b(e - ab)$$

y

$$\begin{aligned} (e - ba)u &= (e - ba)b(e - ab)^{-1}a + (e - ba)e = b(e - ab)(e - ab)^{-1}a + e - ba \\ &= ba + e - ba = e. \end{aligned}$$

□

5 Corolario. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad e y sean $a, b \in \mathcal{A}$. Entonces*

$$\mathrm{Sp}(ab) \cup \{0\} = \mathrm{Sp}(ba) \cup \{0\}.$$

6 Corolario. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad e y sean $a, b \in \mathcal{A}$. Entonces $r(ab) = r(ba)$.*