Descomposición espectral de las matrices circulantes

Objetivos. Demostrar la descomposición espectral de las matrices circulantes.

Requisitos. La definición de la matriz circulante $\operatorname{circ}(a)$ y la fórmula para $\operatorname{circ}(a)b$, multiplicación de vectores por componentes, la definición de la matriz diagonal $\operatorname{diag}(a)$ y la fórmula para $\operatorname{diag}(a)v$, el teorema de convolución, el criterio de igualdad de matrices en términos de la multiplicación por vectores, la inversa de la matriz de Fourier.

Recordemos el criterio de igualdad de matrices en términos de multiplicación por vectores. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $Av = Bv$ para cada v en $\mathbb{C}^n$, entonces $A = B$.

Teorema 1 (descomposición espectral de la matriz circulante)**.** *Sea $a \in \mathbb{C}^n$. Entonces*

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}F_n\right)^* \operatorname{circ}(a) \left(\frac{1}{\sqrt{n}}F_n\right) = \operatorname{diag}(a). \tag{1}$$

Demostración. Para cada x en $\mathbb{C}^n$, por el teorema de convolución,

$$F_n(a * x) = (F_n a) \odot (F_n x).$$

Recordemos que $a * b = \operatorname{circ}(a)b$ y $d \odot v = \operatorname{diag}(d)v$. Luego

$$F_n(\operatorname{circ}(a)x) = \operatorname{diag}(F_n a)(F_n x).$$

Aplicamos la propiedad asociativa de multiplicación de matrices:

$$\big(F_n \operatorname{circ}(a)\big)x = \big(\operatorname{diag}(F_n a)F_n\big)x.$$

Como x es arbitrario, por el criterio de igualdad de matices en términos de multiplicación por vectores concluimos que

$$F_n \operatorname{circ}(a) = \operatorname{diag}(F_n a)F_n. \tag{2}$$

Multiplicamos ambos lados por la derecha por la matriz $\frac{1}{n}F_n^*$ y obtenemos (1). □

Ejercicio 2. Demostrar de manera directa la igualdad (2), sin usar el teorema de convolución.

Observación 3. Conclusiones del Teorema 1:

- las columnas de $\frac{1}{\sqrt{n}}F^*$ son vectores propios de $\operatorname{circ}(a)$;
- las componentes del vector Fa son valores propios de $\operatorname{circ}(a)$;
- la matriz $\operatorname{circ}(a)$ es normal;
- la matriz unitaria $\frac{1}{\sqrt{n}}F_n^*$ diagonaliza de manera simultánea a todas las matrices circulantes.