

Descomposición espectral
de operadores compactos autoadjuntos
(un tema de la teoría de operadores)

Egor Maximenko

<https://esfm.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

13 de junio de 2026

Objetivo

Sea H un espacio de Hilbert y sea $T: H \rightarrow H$ un operador autoadjunto compacto.

Demostrar que T admite una descomposición en valores y vectores propios.

Aplicaciones

- El teorema de Mercer sobre la descomposición espectral de núcleos.
- Análisis espectral de operadores diferenciales de Sturm–Liouville.

Prerrequisitos

- Proyecciones ortogonales.

Prerrequisitos

- Proyecciones ortogonales.
- Subespacios invariantes y reducidos.

Prerrequisitos

- Proyecciones ortogonales.
- Subespacios invariantes y reducidos.
- Operadores compactos.

Prerrequisitos

- Proyecciones ortogonales.
- Subespacios invariantes y reducidos.
- Operadores compactos.
- Propiedades espectrales básicas de operadores compactos.

Prerrequisitos

- Proyecciones ortogonales.
- Subespacios invariantes y reducidos.
- Operadores compactos.
- Propiedades espectrales básicas de operadores compactos.
- Propiedades espectrales básicas de operadores normales y autoadjuntos.

Prerrequisitos

- Proyecciones ortogonales.
- Subespacios invariantes y reducidos.
- Operadores compactos.
- Propiedades espectrales básicas de operadores compactos.
- Propiedades espectrales básicas de operadores normales y autoadjuntos.
- Propiedades espectrales básicas de operadores autoadjuntos compactos.

Prerrequisitos

- Proyecciones ortogonales.
- Subespacios invariantes y reducidos.
- Operadores compactos.
- Propiedades espectrales básicas de operadores compactos.
- Propiedades espectrales básicas de operadores normales y autoadjuntos.
- Propiedades espectrales básicas de operadores autoadjuntos compactos.
- Si T es un operador autoadjunto compacto, entonces $\|T\|$ o $-\|T\|$ es su valor propio.

Plan

- 1 Repaso de las propiedades básicas
- 2 Repaso de los lemas principales
- 3 Enunciado del teorema
- 4 Demostración del teorema
- 5 Corolarios

Repaso: los subespacios propios y el espectro puntual

$\mathcal{B}(H)$:= los operadores lineales acotados $H \rightarrow H$.

Proposición

Si $T \in \mathcal{B}(H)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\ker(\lambda I - T) = \{x \in H : Tx = \lambda x\}.$$

$$\begin{aligned}\sigma_p(T) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(\lambda I - T) \neq \{0_H\}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists x \in H \setminus \{0_H\} \quad Tx = \lambda x\}.\end{aligned}$$

Repaso: los valores y vectores propios de un operador autoadjunto

$\mathcal{B}_a(H)$:= los operadores lineales acotados autoadjuntos $H \rightarrow H$.

$$\mathcal{B}_a(H) := \{ T \in \mathcal{B}(H) : T^* = T \}.$$

Proposición

Si $T \in \mathcal{B}_a(H)$ y $\lambda \in \sigma_p(T)$, entonces $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposición

Si $T \in \mathcal{B}_a(H)$, $\xi, \eta \in \sigma_p(T)$ y $\xi \neq \eta$, entonces

$$\ker(\xi I - T) \perp \ker(\eta I - T).$$

Repaso: cada subespacio propio de un operador autoadjunto es reducente

Proposición

Si $T \in \mathcal{B}_a(H)$ y $\lambda \in \sigma_p(T)$, entonces $W := \ker(\lambda I - T)$ es un subespacio reducente para T :

$$T[W] \subseteq W, \quad T[W^\perp] \subseteq W^\perp.$$

Repaso: el operador comprimido a un subespacio invariante

Proposición

Sea $T \in \mathcal{B}(H)$ y sea W un subespacio cerrado de H invariante para T :

$$T[W] \subseteq W.$$

Definimos $T_W: W \rightarrow W$,

$$T_W(x) := Tx.$$

Entonces,

$$\|T_W\| \leq \|T\|, \quad \sigma_p(T_W) \subseteq \sigma_p(T).$$

Si $T \in \mathcal{B}_a(H)$, entonces $T_W \in \mathcal{B}_a(W)$.

Si $T \in \mathcal{B}_0(H)$, entonces $T_W \in \mathcal{B}_0(W)$.

Repaso: el operador de proyección ortogonal sobre un subespacio cerrado

Proposición

Si W es un subespacio cerrado de H , entonces existe un único $T \in \mathcal{B}(H)$ tal que

$$\forall x \in H \quad Tx \in W, \quad x - Tx \in W^\perp.$$

Denotamos este operador por P_W . Este operador tiene las siguientes propiedades:

$$P_W^2 = P_W, \quad P_W^* = P_W, \quad P_W[H] = W.$$

Repaso: proyecciones ortogonales asociadas a dos subespacios ortogonales

Proposición

Si W_1 y W_2 son subespacios cerrados de H tales que

$$W_1 \perp W_2,$$

entonces $P_{W_1}P_{W_2} = 0$.

Repaso: proyecciones ortogonales asociadas a dos subespacios ortogonales

Proposición

Si W_1 y W_2 son subespacios cerrados de H tales que

$$W_1 \perp W_2,$$

entonces $P_{W_1}P_{W_2} = 0$.

Demostración.

Para cada $x \in H$, tenemos que $P_{W_2}x \in W_2$, luego $P_{W_2}x \in W_1^\perp$ y $P_{W_1}P_{W_2}x = 0_H$.

Plan

- 1 Repaso de las propiedades básicas
- 2 Repaso de los lemas principales**
- 3 Enunciado del teorema
- 4 Demostración del teorema
- 5 Corolarios

Repaso: los subespacios propios de un operador autoadjunto compacto, asociados a los valores propios no nulos, son de dimensión finita

Proposición

Si $T \in \mathcal{B}_0(H) \cap \mathcal{B}_a(H)$ y $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$, entonces $\ker(\lambda I - T)$ es de dimensión finita.
Por consecuencia, $\ker(\lambda I - T)$ es cerrado.

Repaso: los valores propios de un operador autoadjunto compacto, afuera de cada vecindad de cero, forman un conjunto finito

Proposición

Si $T \in \mathcal{B}_0(H) \cap \mathcal{B}_a(H)$ y $r > 0$, entonces el siguiente conjunto es finito:

$$\sigma_p(T) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq r\}.$$

Sobre sucesiones de valores propios de un operador autoadjunto compacto

Corolario

Si $T \in \mathcal{B}_0(H) \cap \mathcal{B}_a(H)$ y $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión con valores en $\sigma_p(T) \setminus \{0\}$, distintos a pares, entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = 0.$$

Sobre sucesiones de valores propios de un operador autoadjunto compacto

Corolario

Si $T \in \mathcal{B}_0(H) \cap \mathcal{B}_a(H)$ y $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión con valores en $\sigma_p(T) \setminus \{0\}$, distintos a pares, entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = 0.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, los siguientes conjuntos son finitos:

$$S_\varepsilon := \{\lambda \in \sigma_p(T) : |\lambda| \geq \varepsilon\}, \quad J_\varepsilon := \xi^{-1}[S_\varepsilon] = \{k \in \mathbb{N} : |\xi_k| \geq \varepsilon\}.$$

Pongamos $m := \max(J_\varepsilon) + 1$. Para $k \geq m$, tenemos que $|\xi_k| < \varepsilon$.

Sobre el punto extremo del espectro puntual del operador autoadjunto compacto

Proposición

Si $T \in \mathcal{B}_0(H) \cap \mathcal{B}_a(H)$, entonces

$$\|T\| \in \sigma_p(T) \quad \vee \quad -\|T\| \in \sigma_p(T).$$

Plan

- 1 Repaso de las propiedades básicas
- 2 Repaso de los lemas principales
- 3 Enunciado del teorema**
- 4 Demostración del teorema
- 5 Corolarios

Teorema

Sea $T \in \mathcal{B}_0(H) \cap \mathcal{B}_a(H)$. Entonces, se tienen las siguientes propiedades.

1. $\sigma_p(T)$ es un subconjunto de \mathbb{R} finito o numerable.
2. Existe una numeración $(\lambda_j)_{j \in J}$ del conjunto $\sigma_p(T) \setminus \{0\}$ tal que J es de la forma $J = \mathbb{N}$ o $J = \{1, \dots, n\}$ con algún n en \mathbb{N} , y la familia $(|\lambda_j|)_{j \in J}$ es decreciente: $\forall j < \sup(J) \quad |\lambda_{j+1}| \leq |\lambda_j|$.
3. Para cada j en J , denotemos por P_j la proyección ortogonal sobre $\ker(\lambda_j I - T)$. Entonces, $P_j P_k = 0$ para $j \neq k$.
4. El operador T tiene la siguiente descomposición.
Si $J = \mathbb{N}$, entonces la serie converge en la norma de $\mathcal{B}(H)$.

$$T = \sum_{j \in J} \lambda_j P_j.$$

Plan

- 1 Repaso de las propiedades básicas
- 2 Repaso de los lemas principales
- 3 Enunciado del teorema
- 4 Demostración del teorema**
- 5 Corolarios

Demostración, idea del proceso iterativo

Pongamos $H_1 := H$, $T_1 := T$.

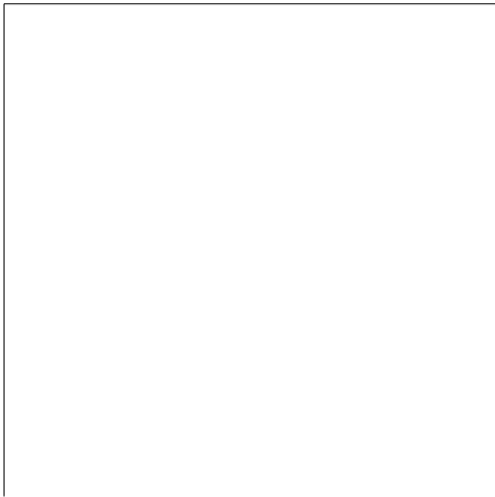
Empezando con $j = 1$, mientras $T_j \neq 0$, construimos los siguientes objetos:

- λ_j el valor propio de T_j tal que $|\lambda_j| = \|T_j\|$,
- $E_j := \ker(\lambda_j I - T)$,
- $P_j :=$ la proyección ortogonal sobre E_j ,
- $H_{j+1} := (E_1 \oplus \cdots \oplus E_j)^\perp$,
- $T_{j+1} :=$ el operador T comprimido a H_{j+1} .

Paso 0, construcción de T_1

Pongamos $H_1 := H$, $T_1 := T$.

Si $T = 0$, entonces terminamos el proceso poniendo $J = \emptyset$.



		E_1	
E_1	$T_X = \lambda_1 x$	0	0
	0		
	0		

	E_1	E_2	$H_3 = (E_1 \oplus E_2)^\perp$
E_1	$Tx = \lambda_1 x$	0	0
E_2	0	$Tx = \lambda_2 x$	0
	0	0	...

Paso 1, construcción de λ_1 y P_1

Estamos suponiendo que $T \neq 0$.

Elegimos $\lambda_1 \in \sigma_p(T)$ tal que

$$|\lambda_1| = \|T\|.$$

Consideramos el subespacio

$$E_1 := \ker(\lambda_1 I - T)$$

y denotamos por P_1 la proyección ortogonal tal que $P_1[H] = E_1$.

Denotamos por H_2 al complemento ortogonal de E_1 :

$$H_2 := E_1^\perp.$$

Paso 1, construcción de T_2

Sabemos que E_1 reduce al operador T .

Por lo tanto, H_2 es un subespacio invariante para T :

$$T[H_2] \subseteq H_2.$$

Denotamos por T_2 al operador T comprimido a H_2 :

$$T_2: H_2 \rightarrow H_2, \quad T_2x := Tx \quad (x \in H_2).$$

Sabemos que $T_2 \in \mathcal{B}_0(H_2) \cap \mathcal{B}_a(T)$ y $\|T_2\| \leq \|T\|$.

Si $T_2 = 0$, entonces terminamos el proceso con $J = \{1\}$.

Paso 1, $\lambda_1 \notin \sigma_p(T_2)$

Mostremos que $\lambda_1 \notin \sigma_p(T_2)$.

Supongamos que $u \in H_2$ tal que $T_2u = \lambda_1u$.

Esto significa que $Tu = \lambda_1u$, es decir,

$$u \in \ker(\lambda_1 I - T) = E_1.$$

Pero $H_2 = E_1^\perp$. Por lo tanto, $u = 0_H$.

Paso 2, construcción de λ_2 y P_2

Estamos suponiendo que $T_2 \neq 0$.

Elegimos $\lambda_2 \in \sigma_p(T_2)$ tal que

$$|\lambda_2| = \|T_2\|.$$

Notamos que $\lambda_2 \in \sigma_p(T)$ y $\lambda_2 \neq \lambda_1$.

Pongamos $E_2 := \ker(\lambda_2 I - T)$.

Definimos P_2 como la proyección ortogonal tal que $P_2[H] = E_2$.

Paso 2, construcción de T_3

Pongamos

$$H_3 := (E_1 \oplus E_2)^\perp.$$

Es fácil ver que $E_1 \oplus E_2$ y H_3 son subespacios reducentes para T .

Definimos T_3 como T comprimido a H_3 :

$$T_3: H_3 \rightarrow H_3, T_3x := Tx \quad (x \in H_3).$$

Es fácil ver que $T_3 \in \mathcal{B}_0(H_3) \cap \mathcal{B}_a(H_3)$ y $\|T_3\| \leq \|T_2\|$.

Si $T_3 = 0$, entonces terminamos el proceso con $J = \{1, 2\}$.

Definición del conjunto de índices J

Así construimos

los números $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots,$

las proyecciones ortogonales $P_1, P_2, P_3, \dots,$

los subespacios cerrados $H_1, H_2, H_3, \dots,$

los operadores T_1, T_2, T_3, \dots

Si en algún paso n se obtiene $T_{n+1} = 0,$

entonces ponemos $J = \{1, \dots, n\}$ y terminamos el proceso

Si $T_j \neq 0$ para cada j en \mathbb{N} , entonces $J := \mathbb{N}.$

Los valores propios λ_j son diferentes a pares

Recordamos que $\lambda_{j+1} \in \sigma_p(T_{j+1})$.

Probemos que $\lambda_1, \dots, \lambda_j \notin \sigma_p(T_{j+1})$.

Supongamos que $u \in H_{j+1}$, $k \in \{1, \dots, j\}$ y $Tu = \lambda_k u$.

En este caso,

$$u \in \ker(\lambda_k I - T) = E_k \subseteq E_1 \oplus \dots \oplus E_j.$$

Como $H_{j+1} = (E_1 \oplus \dots \oplus E_j)^\perp$, concluimos que $u = 0_H$.

La propiedad decreciente de H_j y $|\lambda_j|$

Supongamos que $j \in J$ tal que $j + 1 \in J$.

Como

$$E_1 \oplus \cdots \oplus E_{j-1} \subseteq E_1 \oplus \cdots \oplus E_j,$$

tenemos que

$$H_{j+1} = (E_1 \oplus \cdots \oplus E_j)^\perp \subseteq (E_1 \oplus \cdots \oplus E_{j-1})^\perp = H_j$$

y

$$|\lambda_{j+1}| = \|T_{j+1}\| = \sup_{\substack{u \in H_{j+1} \\ \|u\|=1}} \|Tu\| \leq \sup_{\substack{u \in H_j \\ \|u\|=1}} \|Tu\| = \|T_j\| = |\lambda_j|.$$

La sucesión $(\lambda_j)_{j \in J}$ tiende a 0

Consideremos el caso cuando $J = \mathbb{N}$.

Como $\lambda_k \neq \lambda_j$ para $k \neq j$, concluimos que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = 0.$$

Los operadores residuos R_m

Para cada m en \mathbb{N} , pongamos

$$R_m := T - \sum_{k=1}^m \lambda_k P_k.$$

Si $q \leq m$ y $x \in E_q$, entonces

$$R_m x = Tx - \sum_{k=1}^m \lambda_k P_k x = \lambda_q x - \sum_{k=1}^m \lambda_k \delta_{q,k} x = 0.$$

Por lo tanto,

$$E_1 \oplus \cdots \oplus E_m \subseteq \ker(R_m).$$

Si $x \in H_{m+1} = (E_1 \oplus \cdots \oplus E_m)^\perp$, entonces $R_m x = Tx$.

Los operadores residuos R_m y sus normas

Si $x \in H$, entonces usamos la descomposición

$$x = y + z, \quad y \in E_1 \oplus \cdots \oplus E_m, \quad z \in H_{m+1},$$

y obtenemos

$$\|R_m x\| = \|R_m y + R_m z\| = \|Tz\| = \|T_{m+1}z\| \leq \|T_{m+1}\| \|z\| \leq \|T_{m+1}\| \|x\|.$$

De aquí se sigue que $\|R_m\| \leq \|T_{m+1}\| = |\lambda_{m+1}|$ y

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| T - \sum_{k=1}^m \lambda_k P_k \right\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|R_{m+1}\| = \lim_{m \rightarrow \infty} |\lambda_{m+1}| = 0.$$

Caso $J = \{1, \dots, n\}$

En el caso $J = \{1, \dots, n\}$, tenemos que

$$\|R_n\| \leq \|T_{n+1}\| = 0,$$

así que

$$T = \sum_{k=1}^m \lambda_k P_k.$$

Plan

- 1 Repaso de las propiedades básicas
- 2 Repaso de los lemas principales
- 3 Enunciado del teorema
- 4 Demostración del teorema
- 5 Corolarios

Repetimos el enunciado del teorema

Sea $T \in \mathcal{B}_0(H) \cap \mathcal{B}_a(H)$. Entonces, se tienen las siguientes propiedades.

1. $\sigma_p(T)$ es un subconjunto de \mathbb{R} finito o numerable.
2. Existe una numeración $(\lambda_j)_{j \in J}$ del conjunto $\sigma_p(T) \setminus \{0\}$ tal que J es de la forma $J = \mathbb{N}$ o $J = \{1, \dots, n\}$ con algún n en \mathbb{N} , y la familia $(|\lambda_j|)_{j \in J}$ es decreciente: $\forall j < \sup(J) \quad |\lambda_{j+1}| \leq |\lambda_j|$.
3. Para cada j en J , denotemos por P_j la proyección ortogonal sobre $\ker(\lambda_j I - T)$. Entonces, $P_j P_k = 0$ para $j \neq k$.
4. El operador T tiene la siguiente descomposición.
Si $J = \mathbb{N}$, entonces la serie converge en la norma de $\mathcal{B}(H)$.

$$T = \sum_{j \in J} \lambda_j P_j.$$

Corolarios

Corolario

$$\|T\| = \sup\{|\lambda_j| : j \in J\} \text{ y } \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = 0.$$

Usamos la notación

$$E_j = \ker(\lambda_j I - T) = P_j[H].$$

Corolario

Para cada j en J , el subespacio E_j es de dimensión finita, y

$$T[H] = (\ker T)^\perp = \text{clos} \left(\text{lin} \left(\bigcup_{j \in J} E_j \right) \right).$$

Corolarios

Corolario

Si $T \in \mathcal{B}_0(H) \cap \mathcal{B}_a(H)$, entonces existe una familia finita o numerable $(\xi_j)_{j \in J}$ en \mathbb{R} y una base ortonormal $(b_j)_{j \in J}$ de $(\ker T)^\perp$ tal que para cada x en H ,

$$Tx = \sum_{j \in J} \xi_j \langle x, b_j \rangle b_j.$$