

# Descomposición espectral de operadores compactos autoadjuntos

**Objetivos.** Demostrar el teorema sobre la descomposición espectral de operadores compactos autoadjuntos.

**Prerrequisitos.** Operadores compactos, propiedades espectrales elementales de operadores compactos, propiedades espectrales básicas de operadores normales.

Estamos suponiendo que  $H$  es un espacio de Hilbert.

## Existencia del valor propio cuyo valor absoluto es la norma del operador autoadjunto compacto

**1 Lema.** Sea  $\gamma \geq 0$  y sea  $(\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números reales tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |\xi_j| = \gamma.$$

Entonces existe  $s \in \{-1, 1\}$  y existe una función  $\nu: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  absolutamente creciente tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{\nu(k)} = s\gamma.$$

*Demostración.* Sea

$$J := \{j \in \mathbb{N} : \xi_j \geq 0\}.$$

Caso I:  $J$  es infinito. En este caso, pongamos  $s := 1$  y definimos  $\nu$  como una numeración del conjunto  $J$ . Esto significa que  $\nu: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  es estrictamente creciente y  $\nu[\mathbb{N}] = J$ . Como la sucesión  $\text{abs} \circ \xi$  converge al número  $\gamma$ , su subsucesión  $\text{abs} \circ \xi \circ \nu$  también converge al número  $\gamma$ . Pero  $|\xi_{\nu(k)}| = \xi_{\nu(k)}$  para cada  $k$  en  $\mathbb{N}$ , así que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{\nu(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} |\xi_{\nu(k)}| = \gamma = s\gamma.$$

Caso II:  $J$  es finito. En este caso,  $\mathbb{N} \setminus J$  es infinito. Pongamos  $s := -1$  y definimos  $\nu$  como una numeración del conjunto  $\mathbb{N} \setminus J$ . Razonando de manera similar al caso II, vamos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{\nu(k)} = - \lim_{k \rightarrow \infty} |\xi_{\nu(k)}| = -\gamma = s\gamma. \quad \square$$

**2 Proposición.** Sea  $T \in \mathcal{B}_0(H)$  tal que  $T^* = T$ . Entonces, existe  $\lambda \in \text{Sp}_p(T)$  tal que  $|\lambda| = \|T\|$ .

*Demostración.* Si  $T = 0$ , el resultado es obvio. Consideremos el caso  $T \neq 0$ . Como  $T$  es autoadjunto,

$$\|T\| = \sup_{x \in H, \|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|.$$

Por lo tanto, existe una sucesión  $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$  tal que  $\|y_j\| = 1$  para cada  $j$  en  $\mathbb{N}$  y

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |\langle Ty_j, y_j \rangle| = \|T\|.$$

Usando el Lema 1 encontramos  $s \in \{-1, 1\}$  y elegimos una subsucesión  $z = y \circ \nu$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle Tz_k, z_k \rangle = s\|T\|.$$

Pongamos  $\lambda := s\|T\|$ . Notamos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \|Tz_k - \lambda z_k\|^2 &= \|Tz_k\|^2 - 2\lambda \langle Tz_k, z_k \rangle + |\lambda|^2 \\ &\leq 2\|T\|^2 - 2\lambda \langle Tz_k, z_k \rangle \rightarrow 2\|T\|^2 - 2\lambda^2 = 0. \end{aligned}$$

Como  $T$  es compacto, concluimos que  $\lambda \in \text{Sp}_p(T)$ . □

**3 Lema.** Sea  $T \in \mathcal{B}_0(H)$  tal que  $T^* = T$  y sea  $\gamma > 0$ . Entonces, el conjunto  $\text{Sp}_p(T) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq \gamma\}$  es finito.

*Demostración.* Razonando por reducción al absurdo, supongamos que este conjunto es infinito. Encontramos una numeración  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de este conjunto y una sucesión ortonormal  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $Tu_k = \xi_k u_k$  para cada  $k$ . Entonces, para  $j \neq k$ , tenemos que

$$\|Tu_j - Tu_k\|^2 = \|\xi_j u_j - \xi_k u_k\|^2 = \xi_j^2 + \xi_k^2 \geq 2\gamma^2.$$

Esto significa que la sucesión  $(Tu_j)_{j \in \mathbb{N}}$  es hermitiana, y eso contradice a la suposición que  $T$  es compacto. □

**4 Teorema.** Sea  $T \in \mathcal{B}_0(H)$  tal que  $T^* = T$ . Entonces, se tienen las siguientes propiedades.

1. El conjunto  $\text{Sp}_p(T)$  está contenido en  $\mathbb{R}$  y es finito o numerable.
2. Existe una numeración  $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$  del conjunto  $\text{Sp}_p(T) \setminus \{0\}$  tal que  $J$  es de la forma  $J = \mathbb{N}$  o  $J = \{1, \dots, n\}$  con algún  $n$  en  $\mathbb{N}$ , y la familia  $(|\lambda_j|)_{j \in J}$  es decreciente:  $|\lambda_{j+1}| \leq |\lambda_j|$  para cada  $j$ .

3. Para cada  $j$  en  $\mathbb{N}$ , denotemos por  $P_j$  la proyección ortogonal sobre  $E_j := \ker(\lambda_j I - T)$ . Entonces,  $P_j P_k = 0$  para  $j \neq k$ .

4. Se tiene la siguiente convergencia en la norma de  $\mathcal{B}(H)$ :

$$T = \sum_{j \in J} \lambda_j P_j.$$

*Demostración.* Vamos a construir la sucesión  $(\lambda_j)_{j \in J}$  por pasos.

Si  $T = 0$ , el resultado es obvio, con  $J = \emptyset$ .

Paso 1. Supongamos que  $T \neq 0$ . Por la Proposición 2, existe  $\lambda_1 \in \text{Sp}_p(T)$  tal que  $|\lambda_1| = \|T\|$ . Pongamos  $E_1 := \ker(\lambda_1 I - T)$  y definimos  $P_1$  como la proyección ortogonal tal que  $\text{im}(P_1) = E_1$ . Pongamos  $H_2 := E_1^\perp$ . Sabemos que  $E_1$  reduce  $T$ . Por lo tanto,  $H_2$  reduce  $T$ .

Definimos  $T_2: H_2 \rightarrow H_2$ ,  $T_2 x := T x$ . Es fácil ver que  $T_2 \in \mathcal{B}_0(H_2)$  y  $T_2^* = T_2$ . Más aún, es fácil ver que  $\|T_2\| \leq \|T\|$ .

Si  $T_2 = 0$ , entonces terminamos el proceso. En este caso,  $J = \{1\}$ .

Paso 2. Supongamos que  $T_2 \neq 0$ . Por la Proposición 2, existe  $\lambda_2 \in \text{Sp}_p(T_2)$  tal que  $|\lambda_2| = \|T_2\|$ . De aquí se sigue que  $\lambda_2 \in \text{Sp}_p(T)$  y  $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$ . Pongamos  $E_2 := \ker(\lambda_2 I - T)$  y definimos  $P_2$  como la proyección ortogonal tal que  $\text{im}(P_2) = E_2$ . Notemos que  $\lambda_2 \neq \lambda_1$ . En efecto, para cada  $u$  en  $E_2 \setminus \{0_H\}$  tenemos que  $u \perp E_1$  y  $u \neq 0_H$ , por eso  $u \notin E_1$  y  $\lambda_2 u = T u \neq \lambda_1 u$ .

Pongamos  $H_3 := (E_1 \oplus E_2)^\perp$ . Es fácil ver que  $E_1 \oplus E_2$  y  $H_3$  son subespacios reductores para  $T$ . Definimos  $T_3$  como  $T$  comprimido a  $H_3$ :  $T_3: H_3 \rightarrow H_3$ ,  $T_3 x := T x$ .

Es fácil ver que  $T_3 \in \mathcal{B}_0(H_2)$  y  $T_3^* = T_3$ . Más aún, como  $H_3 \subseteq H_2$ , es fácil ver que  $\|T_3\| \leq \|T_2\|$ .

Si  $T_3 = 0$ , entonces terminamos el proceso. En este caso,  $J = \{1, 2\}$ .

Así construimos una familia  $(\lambda_j)_{j \in J}$ .

Para cada  $j, k$  en  $J$  con  $j < k$ , tenemos que  $E_j \perp E_k$ , por eso  $P_j P_k = P_k P_j = 0$ .

Consideremos el caso cuando  $J = \mathbb{N}$ . Por el Lema 3, para cada  $\gamma > 0$  existe  $m$  en  $\mathbb{N}$  tal que  $|\lambda_m| < \gamma$ . Esto significa que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k| = 0.$$

Como la sucesión  $(|\lambda_j|)_{j \in \mathbb{N}}$  es decreciente, existe  $\gamma \geq 0$  tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |\lambda_j| = \gamma.$$

Mostremos que  $\gamma = 0$ . Si  $\gamma > 0$ , entonces elegimos para cada  $j \in \mathbb{N}$  un vector  $u_j$  en  $E_j$  tal que  $\|u_j\| = 1$ .

Ahora consideremos la sucesión de operadores

$$R_j := T - \sum_{k=1}^j \lambda_k P_k.$$

Si  $q \leq j$  y  $h \in E_q$ , entonces

$$R_j h = T h - \sum_{k=1}^j \lambda_k P_k h = \lambda_q h - \sum_{k=1}^j \lambda_k \delta_{j,k} = 0.$$

Por lo tanto,

$$E_1 \oplus \cdots \oplus E_j \subseteq \ker(R_j).$$

Si  $h \in H_{j+1} = (E_1 \oplus \cdots \oplus E_j)^\perp$ , entonces

$$R_j h = T h.$$

Como  $H_{j+1}$  reduce  $T$ , tenemos que

$$\|R_j\| = \sup_{\substack{x \in H_{j+1} \\ \|x\|=1}} \|R_j x\| = \sup_{\substack{x \in H_{j+1} \\ \|x\|=1}} \|T x\| = \|T_{j+1}\| = |\lambda_{j+1}|.$$

Por lo tanto,  $\|R_j\| \rightarrow 0$  cuando  $j \rightarrow \infty$ .

Si  $J = \{1, \dots, n\}$ , entonces tenemos simplemente  $R_n = 0$  y

$$T = \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j.$$

□